2005 年度　統計工学　中間試験問題

[1]　自由度nのχ^2分布の確率密度関数は次式で与えられる（テキスト p.28）。

$$f(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2}$$

自由度$n=6$のχ^2分布にしたがう確率変数を区間（0, 1）の一様乱数から発生したい。そのための，次の２通りの発生法を具体的に述べよ。

1)　「独立に標準正規分布にしたがうn個の確率変数の２乗和の分布を自由度nのχ^2分布という」という定義（テキスト p.28）に即した発生法

2)　自由度$n=2$のχ^2分布は平均２の指数分布である（テキスト p.32）。この事実と，テキスト p.6 の例 1.5 後半の内容を組み合わせた発生法。

[2]　単回帰モデル $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$ （i＝1,2,⋯,n）において、誤差 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ が互いに独立に正規分布$N(0, \sigma^2)$に従うとする。

1)　このとき、回帰パラメータの最小２乗推定量

$$\hat{\beta} = S_{xy} / S_{xx}$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x}$$

が、それぞれ最尤推定量になっていることを示し、σ^2の最尤推定量を求めよ。

2)　残差を$e_i = y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i)$とすると、$\sum_{i=1}^{n} e_i = 0$となることを示せ。

[3]　$X_1, X_2, \cdots, X_n$がたがいに独立にパラメータλのポアソン分布にしたがっている。

1)　因数分解定理（テキスト p.51）より十分統計量Tを求めよ。

2)　十分統計量Tの分布を求めよ（テキスト p.39，問 2.5 を参照）。

3)　十分統計量Tを与えたときの $X_1, X_2, \cdots, X_n$の条件付き分布を求め、これがパラメータλに依存しないことを確かめよ。

[4]　$X_1, X_2, \cdots, X_n$はたがいに独立に正規分布$N(\mu, \sigma^2)$にしたがっている。

1)　$X_i - \bar{X}$の平均と分散を求めよ。

2)　$X_i - \bar{X}$ と$X_j - \bar{X}$の共分散を求めよ。ここに $i \neq j$である。