2006.06.13

2006 年度　統計工学　中間試験問題

[1]　n 個の確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ はたがいに独立にラプラス分布（両側指数分布とも呼ばれる）にしたがっている．パラメータ μ と θ の最尤推定量を求めよ．ラプラス分布の確率密度関数は次式で与えられる．

$$f(x) = \frac{1}{2\theta}\exp\left[-\frac{|x-\mu|}{\theta}\right] \qquad (-\infty < x < \infty)$$

[2]　n 個の確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ はたがいに独立に区間[0, θ]の一様分布にしたがっているとする．

(1)　θ の最尤推定量は $\hat{\theta} = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$で与えられる．この期待値を求め，偏りを補正した不偏推定量を構成せよ．そしてこの不偏推定量の分散を求めよ．

(2)　別の自明な不偏推定量として, 算術平均の 2 倍 $2\overline{X}$ を考えることができる. この $2\overline{X}$ の分散を求め，これが(1)での分散よりも大きいことを確認せよ．

[3]　単回帰モデル $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$（$i = 1, 2, \cdots, n$）において、回帰パラメータの最小 2 乗推定量は

$$\hat{\beta} = S_{xy} / S_{xx}$$
$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\,\bar{x}$$

で，これより得られる個々の予測値を $\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i$ とする．このとき，y の平方和が

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2$$

と分解されることを示せ．

[4]　$X_1, X_2, \cdots, X_n$ はたがいに独立に正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ にしたがっている。

1)　$X_i - \overline{X}$ の平均と分散を求めよ。

2)　$X_i - \overline{X}$　と $X_j - \overline{X}$ の共分散を求めよ。ここに $i \neq j$ である。