2007年度　統計工学　期末試験問題

テキスト、プリント、ノート持ち込み可．電卓使用可．解答は結果だけでなく、導出過程を要領よく記述すること．

１．　平均θの指数分布の確率密度関数は

$$f(x)=\frac{1}{\theta}\exp\left[-\frac{x}{\theta}\right]$$

である。$X_1, X_2, \cdots, X_n$がこの分布にたがいに独立にしたがうとする．このとき，次の帰無仮説，対立仮説に対する尤度比検定を導け．

H_0：$\theta=\theta_0$

H_1：$\theta\neq\theta_0$

２．　$\sigma=3$の正規分布において、H_0：$\mu=1$ を H_1：$\mu>1$に対して有意水準$\alpha=0.05$で検定する。標本数 n＝9 のとき、$\mu=2$での検出力を求めよ。

３．　ある高速道路で１年間に起きた追突事故で、運転手が男性のケースについて、運転手の生死とシートベルト着用の有無から分類し、各度数を調べた。このデータからシートベルトの効果を検定せよ。

	生存	死亡
ベルト着用	613	75
未着用	324	98

４．　単回帰モデル $y=\alpha+\beta x+\varepsilon$ で、εの分布を$N(0,\sigma^2)$としたとき、回帰係数βの最小２乗推定量$\hat{\beta}$の分散が

$$V(\hat{\beta})=\frac{\sigma^2}{S_{xx}}$$

で与えられることを証明せよ。ここにS_{xx}はxの平方和である。

５．　次の中途打ち切りデータを累積ハザード法で解析したい．

35.4，45.8*，21.3，28.9*，61.3，75.9*，51.1*，53.7，72.8

*は打ち切りデータを意味する．61.3 での累積ハザード値を求めよ．

基準解答

１．尤度比は

$$\Lambda = \frac{\max_{\theta}(1/\theta)^n \exp[-\sum x_i/\theta]}{(1/\theta_0)^n \exp[-\sum x_i/\theta_0]}$$

で与えられる．ここに分子を最大にするθは，その最尤推定量$\bar{x}$だから

$$\Lambda = \frac{(1/\bar{x})^n \exp[-\sum x_i/\bar{x}]}{(1/\theta_0)^n \exp[-\sum x_i/\theta_0]}$$

$$= \left(\frac{\theta_0}{\bar{x}}\right)^n \exp[-n + n(\bar{x}/\theta_0)]$$

となる．ここで，$y = \bar{x}/\theta_0$とおけば，Λは$y = 1$ で最小値をとるので，検定の棄却域は$c_1 < c_2$なる定数において，$y \leqq c_1$，$y \geqq c_2$という形をとる．

帰無仮説のもとで$2n\ y$は，自由度$2n$のカイ２乗分布にしたがうので，有意水準をαとしたとき，$\mathrm{P}\{y \leqq c_1\} = \alpha/2$，$\mathrm{P}\{y \geqq c_2\} = \alpha/2$とすれば，$c_1$と$c_2$が定まる．

２．　検定の棄却域は，片側検定なので

$$\bar{X} > \mu_0 + 1.645\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1 + 1.645 \times 3/3 = 2.645$$

となる．検出力は

$$\mathrm{P}\left(\frac{\bar{X} - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} + 1.645\right)$$

で求められ，括弧内左辺は標準正規分布にしたがい，右辺の値は 0.645 である．
よって検出力は 0.2595 となる．

３．　２×２分割表のχ^2適合度検定統計量の公式（テキスト p.157）より

$$\chi^2 = \frac{(613 \times 98 - 324 \times 75)^2 \times 1110}{688 \times 422 \times 937 \times 173} = 30.18$$

$\chi^2(1, 0.01) = 6.63$ より高度に有意で，シートベルトの効果があるといえる．

４．　単回帰モデル$y = \alpha + \beta x + \varepsilon$で、$\varepsilon$の分布を$N(0, \sigma^2)$とすると，$\mathrm{V}(y) = \sigma^2$である．

最小２乗推定量$\hat{\beta}$は

$$\hat{\beta} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$$

で与えられる．ここに分子の偏差積和S_{xy}は

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})y_i$$

であるから，線形結合の分散の公式（テキスト(2.9)式）より

$$\mathrm{V}(S_{xy}) = S_{xx}\,\sigma^2$$

である．これより

$$V(\hat{\beta}) = \frac{S_{xx}\sigma^2}{S_{xx}^2} = \frac{\sigma^2}{S_{xx}}$$

を得る．

35.4，45.8*，21.3，28.9*，61.3，75.9*，51.1*，53.7，72.8

５．　データを小さい順に並べ替え

i	t_i	ハザード値	累積ハザード値
1	21.3	1／9	1／9＝0.111
2	28.9*	0	－
3	35.4	1／7	0.111＋1／7＝0.2539
4	45.8*	0	－
5	51.1*	0	－
6	53.7	1／4	0.2539＋1／4＝0.5039
7	61.3	1／3	0.5039＋1／3＝0.8372
8	72.8	1／2	0.8372＋1／2＝1.3372
9	75.9*	0	－

よって，求める 61.3 での累積ハザード値は 0.8372 となる．