数理工学第二　演習 解答例

(24 章　関数空間とフーリエ級数)

2014 年 1 月 31 日　金曜日

演習課題　24.B

区間 $[-\pi, \pi]$ で定義された関数 $f(t)$ を三角関数を用いて

$$f_N(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt) \qquad (N : \text{固定}) \tag{1}$$

と近似することを考える．近似の誤差としては平均二乗誤差

$$\frac{1}{2\pi} ||f_N(t) - f(t)||^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f_N(t) - f(t))^2 \mathrm{d}t \tag{2}$$

を考えることにする．平均二乗誤差が最小になるのは, $f_N(t)$ の係数

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_N, \beta_1, \ldots, \beta_N \tag{3}$$

として $f(t)$ の対応するフーリエ係数をとったときに限ることを示せ.

(解答例)

$$\frac{1}{2\pi} ||f_N(t) - f(t)||^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f_N(t) - f(t))^2 \mathrm{d}t \tag{4}$$

に

$$f_N(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt) \tag{5}$$

を代入すると

$$\frac{1}{2\pi} ||f_N(t) - f(t)||^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 \mathrm{d}t - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left\{ \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt) \right\} \mathrm{d}t \tag{6}$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt) \right\}^2 \mathrm{d}t \tag{7}$$

となる．次に, 以下の 2 点に注意して, 式 (7) を整理する．まず 1 つめは, 三角関数系の直交性より,

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \ \mathrm{d}t = 2\pi, \tag{8}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mt \ \mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mt \ \mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mt \ \sin nt \ \mathrm{d}t = 0, \tag{9}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mt \cos nt \ \mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mt \sin nt \ \mathrm{d}t = \pi \delta_{mn} \tag{10}$$

(m, n は自然数; δ_{mn} は $m = n$ で 1 の値をとり, それ以外では 0 の値をとるとする)

が成立していることである．もう 1 つは, $f(t)$ のフーリエ係数 a_0, a_n, b_n の定義が

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \ \mathrm{d}t \quad , \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \ \mathrm{d}t \quad , \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \ \mathrm{d}t \tag{11}$$

で与えられられていることである．これらのことに注意して，式 (7) を式 (8), (9), (10), (11) を用いて整理すると

$$\frac{1}{2\pi}||f_N(t)-f(t)||^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\left\{\frac{\alpha_0^2}{2} + \alpha_1^2 + \cdots \alpha_N^2 + \beta_1^2 + \cdots + \beta_N^2 \right. \tag{12}$$

$$\left. -\alpha_0 a_0 - 2\alpha_1 a_1 - \cdots - 2\alpha_N a_N - 2\beta_1 b_1 - \cdots - 2\beta_N b_N \right\} \tag{13}$$

となる．上式を平方完成して

$$\frac{1}{2\pi}||f_N(t)-f(t)||^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2\mathrm{d}t \tag{14}$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(\alpha_0 - a_0)^2 + (\alpha_1 - a_1)^2 + \cdots + (\alpha_N - a_N)^2\right\} \tag{15}$$

$$+\frac{1}{2}\left\{(\beta_1 - b_1)^2 + \cdots + (\beta_N - b_N)^2\right\} \tag{16}$$

$$-\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_N^2 + b_1^2 + \cdots + b_N^2\right\} \tag{17}$$

を得る．ここで上式の右辺 1 行目の積分や右辺 4 行目の引き算は $\alpha_0, \alpha_n, \beta_n$ に依らない．よって，上式より，平均二乗誤差は $\alpha_0 = a_0, \alpha_n = a_n, \beta_n = b_n$ のときに最小になる．つまり，平均二乗誤差が最小になるのは $\alpha_0, \alpha_n, \beta_n$ として $f(t)$ のフーリエ係数をとったときに限る． □

演習課題　24.C

(1) 区間 $[-\pi, \pi]$ における関数 $f(t)$ を以下で定義する．

$$f(t) = \begin{cases} -a & (-\pi \le t < 0) \\ a & (0 \le t < \pi) \end{cases} \qquad (a > 0) \tag{18}$$

$f(t)$ を区間 $[-\pi, \pi]$ でフーリエ級数展開せよ．

(2) 以下の等式を示せ．

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots \tag{19}$$

(解答例)

(1) $f(t)$ は奇関数なので $a_0 = 0, a_n = 0$ である．また，

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} a\sin nt\mathrm{d}t \tag{20}$$

$$= \frac{2a}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos nt\right]_0^{\pi} = \frac{2a}{\pi}\frac{1}{n}\left\{1-\cos(n\pi)\right\} = \frac{2a}{\pi}\frac{1}{n}\left\{1-(-1)^n\right\} \tag{21}$$

$$= \begin{cases} \frac{4a}{\pi}\frac{1}{n} & (n : \text{奇数}) \\ 0 & (n : \text{偶数}) \end{cases} \tag{22}$$

である．よって以下を得る．

$$f(t) = \frac{4a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\left\{(2n-1)t\right\} = \frac{4a}{\pi}\left(\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\sin 5t + \cdots\right) \tag{23}$$

(2) 式 (23) において $t=\frac{\pi}{2}$ を代入すると $f(\frac{\pi}{2})=a$ であるので

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+-\cdots \tag{24}$$

を得る. □

演習課題　24.D

(1) $f(t)=\cos\omega t$, (ω : 整数でない実数) を区間 $[-\pi,\pi]$ でフーリエ級数展開せよ.

(2) 以下の等式を示せ.

$$\frac{\omega\pi}{\sin\omega\pi}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\omega^2}{\omega^2-n^2}(-1)^n \tag{25}$$

(解答例)

(1) $f(t)=\cos\omega t$ は偶関数なので $b_n=0$. また,

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\omega t\,\mathrm{d}t=\frac{2\sin\omega\pi}{\omega\pi}\quad, \tag{26}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\omega t\cos nt\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\{\cos(\omega+n)t+\cos(\omega-n)t\}\,\mathrm{d}t \tag{27}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\omega+n)t}{\omega+n}+\frac{\sin(\omega-n)t}{\omega-n}\right]_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{\sin(\omega+n)\pi}{\omega+n}+\frac{\sin(\omega-n)\pi}{\omega-n}\right\} \tag{28}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{(-1)^n\sin\omega\pi}{\omega+n}+\frac{(-1)^n\sin\omega\pi}{\omega-n}\right\}=\frac{2\omega(-1)^n}{\pi(\omega^2-n^2)}\sin\omega\pi \tag{29}$$

である. よって以下を得る.

$$f(t)=\frac{\sin\omega\pi}{\pi}\left\{\frac{1}{\omega}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\omega(-1)^n}{(\omega^2-n^2)}\cos nt\right\} \tag{30}$$

(2) (30) 式で $t=0$ を代入して与式を得る. □