数理工学第一　中間試験解答例　　　２００９年６月９日

問題１

1. 命題 p, q, r からなる複合命題 $(p \to q) \wedge (q \to r)$ の真偽表を書け。
2. 集合 P, Q が与えられている。以下の中から，命題 $\forall x,\ x \in P \to x \in Q$ の否定となっているものはどれか？

ア	$\forall x,\ x \notin P \wedge x \in Q$	イ	$\exists x,\ x \in P \wedge x \notin Q$
ウ	$\forall x,\ x \notin P \vee x \notin Q$	エ	$\exists x,\ x \in P \vee x \notin Q$

1.

p	q	r	$(p$	$\to$	$q)$	$\wedge$	$(q$	$\to$	$r)$
T	T	T	T	T	T	**T**	T	T	T
T	T	F	T	T	T	**F**	T	F	F
T	F	T	T	F	F	**F**	F	T	T
T	F	F	T	F	F	**F**	F	T	F
F	T	T	F	T	T	**T**	T	T	T
F	T	F	F	T	T	**F**	T	F	F
F	F	T	F	T	F	**T**	F	T	T
F	F	F	F	T	F	**T**	F	T	F

2. 正解は イ

解説：
$\forall x,\ x \in P \to x \in Q$ の否定は $\exists x,\ \neg(x \in P \to x \in Q)$
下記真偽表より，$\neg(x \in P \to x \in Q)$ と $x \in P \wedge x \notin Q$ が同値であることが分かる。

$x \in P$	$x \in Q$	$\neg$	$(x \in P$	$\to$	$x \in Q)$	$x \in P$	$\wedge$	$x \notin Q$
T	T	**F**	T	T	T	T	**F**	F
T	F	**T**	T	F	F	T	**T**	T
F	T	**F**	F	T	T	F	**F**	F
F	F	**F**	F	T	F	F	**F**	T

問題2

$S = \{a, b, c, d\}$ とする。S のべき集合 2^S から，集合 $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ への写像として，次のようなものを考える。

$$f(P) = |P|$$

ここで，P は S の部分集合であり，$|P|$ はその濃度を意味する。

1. 写像 f が単射であるかどうか述べ，その理由を挙げよ。
2. 写像 f が全射であるかどうか述べ，その理由を挙げよ。
3. S のべき集合 2^S から $\emptyset$ だけを取り除いた集合族を $\mathcal{M}$ とする。包含関係 $\subset$ によって定められた順序関係において，$\mathcal{M}$ の極小元と極大元を全て挙げよ。(答えだけでよい)

1. f は単射でない。
   写像 $f : 2^S \mapsto \{0, 1, 2, 3, 4\}$ は，2^S の任意元 a, a' に対して，
   $a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$ が成り立つとき，2^S から $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ への単射である。
   「f は単射でない」を示すのは，「任意元 a, a' に対して，$a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$ が成り立つ」という文の否定を示すことになるので，反例を見つければよい。
   反例：$\{a\} \neq \{b\}$ かつ $f(\{a\}) = f(\{b\}) = 1$

2. f は全射である。
   $f(\emptyset) = 0, f(\{a\}) = 1, f(\{a, b\}) = 2, f(\{a, b, c\}) = 3, f(\{a, b, c, d\}) = 4$ より，f は全射。

3. $\subset$ によって定められた順序関係をもつ集合族 $\mathcal{M}$ の極小元は $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, 極大元は $\{a, b, c, d\}$ である。

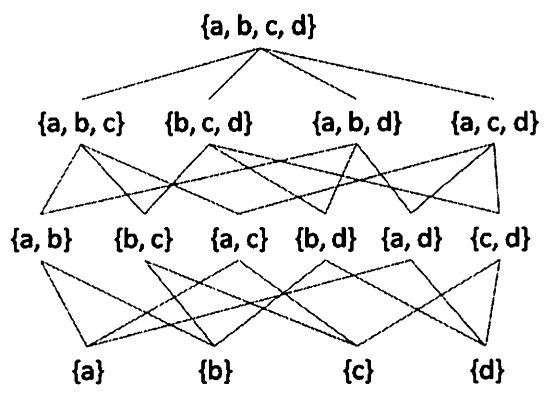

図 1

問題3

$f: A \to B$ を写像とし，P, Q を B の部分集合とする。このとき，以下の関係式を証明せよ。

$$P \subset Q \Rightarrow f^{-1}(P) \subset f^{-1}(Q)$$

$P \subset Q$ を仮定する。

$$\begin{aligned} a \in f^{-1}(P) &\Longrightarrow f(a) \in P && \text{(逆像の定義より)} \\ &\Longrightarrow f(a) \in Q && (P \subset Q \text{ より}) \\ &\Longrightarrow a \in f^{-1}(Q) && \text{(逆像の定義より)} \end{aligned}$$

よって，$P \subset Q \Rightarrow f^{-1}(P) \subset f^{-1}(Q)$ が示された。

問題4

任意の $x, y \in \Re$ に対し，$x - y$ が有理数であるとき，xTy として２項関係 T を定義する。

1. ２項関係 T が $\Re$ における同値関係となることを示せ。
2. 0 の同値類 $C(0)$ が可算集合（可付番集合) であることを説明せよ。
3. 商集合 $\Re/T$（同値類を元とする集合）が無限集合であることを説明せよ。$\aleph_0 < \aleph$ であることは証明なしに使ってよい。

以下，有理数の集合を $\mathcal{Q}$ と表す。

1.

反射律： 任意の $x \in \Re$ に対し，$x - x = 0 \in \mathcal{Q}$ が成り立つので，xTx である。

対称律； xTy を仮定する。T の定義より $x - y \in \mathcal{Q}$ である。このとき，$y - x = -(x - y) \in \mathcal{Q}$ となるので，yTx を満たす。

推移律； xTy と yTz を仮定する。T の定義より $x - y \in \mathcal{Q}$, $y - z \in \mathcal{Q}$ である。このとき，$x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathcal{Q}$ となるので，xTz を満たす。

よって，反射律，対称律，推移律が成り立つので T は同値関係である。

2. $C(0) = \{x \in \Re \mid xT0\} = \{x \in \Re \mid x - 0 \in \mathcal{Q}\}$ より，$C(0)$ は有理数全体の集合と一致する。以下では，有理数集合 $\mathcal{Q}$ の濃度について考える。$\mathcal{N} \to \mathcal{Q}$ への写像として，$f(n) = n$ を考えると，こ

れは単射である。よって，

$$|\mathcal{N}| \leq |\mathcal{Q}|.$$

$\mathcal{N} \times \mathcal{Z} \to \mathcal{Q}$ への写像として，$f(p,q) = p/q$ を考えると，これは全射である。よって，

$$|\mathcal{Q}| \leq |\mathcal{N} \times \mathcal{Z}|.$$

$\mathcal{N} \times \mathcal{Z} \to \mathcal{N}$ への写像として，$f(p,q) = (p + |q| - 1)^2 + p + |q| + q$ を考えると，これは全単射である。よって，

$$|\mathcal{N} \times \mathcal{Z}| = |\mathcal{N}|.$$

以上より，

$$|\mathcal{N}| \leq |\mathcal{Q}| \leq |\mathcal{N} \times \mathcal{Z}| = |\mathcal{N}|$$

が成り立ち，有理数の集合 $\mathcal{Q}$ が可算であることが分かる。

3. ２通りの説明を述べる。
   - もし，商集合が有限集合だったとする。元の数を k 個とすると，同値類を $C_1, C_2, C_3, \cdots, C_k$ と表記することができる。同値類であるので，

     $$\bigcup_{i=1}^{k} C_i = \Re, \qquad i \neq j,\ C_i \cap C_j = \emptyset$$

     が成り立つ。
     同値関係 T の定義より，$C_i\ (i = 1, 2, \cdots, k)$ の一つの元 r_i をとり，$\forall r \in C_i, f(r) = r - r_i$ と定めれば，$f : C_i \mapsto \mathcal{Q}$ が全単射となる。
     よって，同値類 $C_i\ (i = 1, 2, \cdots, k)$ は有理数集合と濃度が等しい。つまり可算集合である。また，可算集合の有限個の和集合は可算集合であるため，$\bigcup_{i=1}^{k} C_i$ は可算集合となる。すると，実数の集合が可算集合となり，$\aleph_0 < \aleph$ と矛盾する。よって，商集合は有限集合でない，つまり無限集合である。

   - 次のような数の集合について考える。

     $$\sqrt{2},\ 2\sqrt{2},\ 3\sqrt{2},\ 4\sqrt{2},\ 5\sqrt{2},\ \cdots$$

     これらの数は互いに同値関係にはない。なぜなら，自然数 $i, j (i \neq j)$ において，$i\sqrt{2} - j\sqrt{2} = (i - j)\sqrt{2} \notin \mathcal{Q}$ だからである。つまり，これらの数は同じ同値類には属さない。ということは，これらから作られる同値類

     $$C(\sqrt{2}),\ C(2\sqrt{2}),\ C(3\sqrt{2}),\ C(4\sqrt{2}),\ C(5\sqrt{2}),\ \cdots$$

     は，全て異なる同値類である。それゆえ，同値類の濃度は少なくても $\aleph_0$ であることがわかる。つまり，商集合は無限集合である。