オペレーションズリサーチ 2010(2) シンプレックス法

水野 眞治 (西 9-520 号室)、中田 和秀 (西 9-521 号室)，北原知就（西 9-425 号室）

本資料は，参考文献 [1] をもとにしている．

3 シンプレックス法

3.1 基底解

3.1.1 線形方程式系の基底解

n 個の変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ からなる，m 本の線形方程式系を

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{1}$$

とする．ベクトル

$$\boldsymbol{a}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \ (i \in \mathcal{N}_n),\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

を使うと，線形方程式系 (1) は,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{b}$$

とあらわせる．ここで，$\mathcal{N}_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ である．n 個の m 次ベクトル $\boldsymbol{a}_i$ $(i \in \mathcal{N}_n)$ を横に並べた $m \times n$ 行列を $\boldsymbol{A}$ とすれば，この線形方程式系は,

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

と記述することもできる．以下，本テキストでは，次の仮定をおく．

仮定 3.1 $m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ のランクが m である．

この仮定から，$m \leq n$ である．変数の数 n が等式の数 m 以上であるので，この線形方程式系 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ をみたす解は，一般に数多くある．行列 $\boldsymbol{A}$ のランクが m であるという仮定より，n 個のベクトル $\boldsymbol{a}_i$ $(i \in \mathcal{N}_n)$ から一次独立な m 個の基底ベクトル $\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_m}$ を選ぶことができる．ここで選んだベクトルの添え字の集合を $I_B = \{i_1, i_2, \cdots, i_m\}$ と

し，選ばれなかった $n-m$ 個のベクトルの添え字の集合を $I_N=\{i_{m+1},i_{m+2},\cdots,i_n\}$ とする．また，

$$\boldsymbol{A}_B=(\boldsymbol{a}_{i_1},\boldsymbol{a}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{a}_{i_m}),\ \boldsymbol{A}_N=(\boldsymbol{a}_{i_{m+1}},\boldsymbol{a}_{i_{m+2}},\cdots,\boldsymbol{a}_{i_n}),$$

$$\boldsymbol{x}_B=\begin{pmatrix} x_{i_1} \\ x_{i_2} \\ \vdots \\ x_{i_m}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_N=\begin{pmatrix} x_{i_{m+1}} \\ x_{i_{m+2}} \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$$

とすれば，線形方程式系 (1) は，

$$\sum_{i\in I_B} x_i\boldsymbol{a}_i+\sum_{i\in I_N} x_i\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{b} \tag{2}$$

あるいは

$$\boldsymbol{A}_B\boldsymbol{x}_B+\boldsymbol{A}_N\boldsymbol{x}_N=\boldsymbol{b} \tag{3}$$

とあらわすことができる．この行列 $\boldsymbol{A}_B$ は，一次独立な m 個の m 次ベクトルを並べた $m\times m$ 行列であるから，正則であり，逆行列をもつ．行列 $\boldsymbol{A}_B$ を**基底行列**あるいは単に**基底**という．(3) より，$\boldsymbol{x}_B=\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{x}_N=\boldsymbol{0}$ は，上の線形方程式系の 1 つの解となる．この解 $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b},\boldsymbol{0})$ を基底行列 $\boldsymbol{A}_B$ における線形方程式系 (1) の**基底解**という．また，$\boldsymbol{x}_B$ の要素となっている x_i $(i\in I_B)$ を**基底変数**，$\boldsymbol{x}_N$ の要素となっている x_i $(i\in I_N)$ を**非基底変数**という．この過程において，一次独立なベクトルの選び方は，n 個から m 個選ぶ組み合わせの数 ${}_nC_m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$ だけありえるので，基底行列あるいは基底解の数も最大 ${}_nC_m$ 個ある．

3.1.2 標準形の線形計画問題の基底解

この節では，標準形の線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0} \end{array} \tag{4}$$

を扱う．方程式系 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の基底行列 $\boldsymbol{A}_B$ における基底解 $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b},\boldsymbol{0})$ は，非負条件 $\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0}$ をみたすとき，この線形計画問題の実行可能解であるので，**実行可能基底解**と呼ばれる．さらに，それが線形計画問題の最適解となっているならば，**最適基底解**と呼ばれる．また，$\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}$ の要素がすべて 0 でないとき**非退化の基底解**といい，0 となっている要素があるとき**退化した基底解**という．すべての基底解が非退化であるとき，その**線形計画**

問題が非退化であるという．実行可能基底解あるいは最適基底解の存在について，次の重要な結果が知られている．

定理 3.2 標準形の線形計画問題 (4) において，$m \times n$ 係数行列 $\boldsymbol{A}$ のランクが m であるとき

1. 実行可能解が存在するならば，実行可能基底解が存在する．
2. 最適解が存在するならば，最適基底解が存在する．

3.1.3 双対問題の基底解

標準形の線形計画問題 (4) の双対問題は

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{5}$$

となる．行列 $\boldsymbol{A}$ の基底行列を $\boldsymbol{A}_B$ とし，ベクトル $\boldsymbol{c}$ の基底変数に対応する部分ベクトルを $\boldsymbol{c}_B$，非基底変数に対応する部分ベクトルを $\boldsymbol{c}_N$ とし，同様にベクトル $\boldsymbol{z}$ の部分ベクトル $\boldsymbol{z}_B$ と $\boldsymbol{z}_N$ を定義する．このとき，上の双対問題 (5) は，

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}_B^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}_B = \boldsymbol{c}_B \\ & \boldsymbol{A}_N^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}_N = \boldsymbol{c}_N \\ & \boldsymbol{z}_B \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{z}_N \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

とあらわすことができる．ここで $\boldsymbol{A}_B$ が正則行列であるので，

$$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{A}_B^T)^{-1}\boldsymbol{c}_B,\ \boldsymbol{z}_B = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{z}_N = \boldsymbol{c}_N - \boldsymbol{A}_N^T(\boldsymbol{A}_B^T)^{-1}\boldsymbol{c}_B$$

は，問題の中の等式条件 $\boldsymbol{A}_B^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}_B = \boldsymbol{c}_B$ と $\boldsymbol{A}_N^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}_N = \boldsymbol{c}_N$ をみたす．この解 $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{A}_B^T)^{-1}\boldsymbol{c}_B$ と $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{c}_N - \boldsymbol{A}_N^T(\boldsymbol{A}_B^T)^{-1}\boldsymbol{c}_B)$ を基底行列 $\boldsymbol{A}_B$ における**双対問題の基底解**という．この解は，実行可能 $(\boldsymbol{c}_N - \boldsymbol{A}_N^T(\boldsymbol{A}_B^T)^{-1}\boldsymbol{c}_B \geq \boldsymbol{0})$ であれば**実行可能基底解**，さらに最適であれば**最適基底解**と呼ばれる．このとき，ベクトル $\boldsymbol{c}_N - \boldsymbol{A}_N^T(\boldsymbol{A}_B^T)^{-1}\boldsymbol{c}_B$ の成分がすべて 0 でないならば**非退化の基底解**といい，0 の要素があれば**退化した基底解**という．すべての基底解が非退化であれば**双対問題が非退化**であるという．

同じ基底行列 $\boldsymbol{A}_B$ における主問題の基底解 $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{0})$ と双対問題の基底解 $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{A}_B^T)^{-1}\boldsymbol{c}_B$，$\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{c}_N - \boldsymbol{A}_N^T(\boldsymbol{A}_B^T)^{-1}\boldsymbol{c}_B)$ では，

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}_N^T\boldsymbol{0} = \boldsymbol{b}^T(\boldsymbol{A}_B^T)^{-1}\boldsymbol{c}_B = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$$

が成立しているので，それぞれの目的関数値が等しい．したがって，それらが共に実行可能解であるならば，弱双対定理より，それぞれの問題の最適解となる．以上のことから，次の定理が成り立つ．

定理 3.3 標準形の線形計画問題 (4) の基底行列 $\boldsymbol{A}_B$ における基底解 $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{0})$ は

$$\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{c}_N - \boldsymbol{A}_N^T(\boldsymbol{A}_B^T)^{-1}\boldsymbol{c}_B \geq \boldsymbol{0}$$

をみたすならば，(4) の最適解である．このとき，双対問題 (5) の基底行列 $\boldsymbol{A}_B$ における基底解 $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{A}_B^T)^{-1}\boldsymbol{c}_B$ と $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{c}_N - \boldsymbol{A}_N^T(\boldsymbol{A}_B^T)^{-1}\boldsymbol{c}_B)$ も (5) の最適解となっている．

この定理は基底解が最適解であるための十分条件を示しており，シンプレックス法により生成される基底解が最適解であるかどうかの判定に使うことができる．

3.2 線形計画問題の辞書 (基底形式表現)

3.2.1 辞書

標準形の線形計画問題 (4) を再掲すると

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

である．行列 $\boldsymbol{A}$ から基底行列 $\boldsymbol{A}_B$ を選ぶと，(3) のように等式条件 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を

$$\boldsymbol{A}_B\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{A}_N\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{b}$$

とあらわすことができる．行列 $\boldsymbol{A}_B$ が正則であるので，この式は

$$\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{A}_N\boldsymbol{x}_N$$

と変形できる．これを目的関数に代入すると

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} & = & \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{c}_N^T\boldsymbol{x}_N \\ & = & \boldsymbol{c}_B^T(\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{A}_N\boldsymbol{x}_N) + \boldsymbol{c}_N^T\boldsymbol{x}_N \\ & = & \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c}_N^T - \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{A}_N)\boldsymbol{x}_N \end{array}$$

がえられる．したがって，線形計画問題 (4) は

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c}_N^T - \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{A}_N)\boldsymbol{x}_N \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{A}_N\boldsymbol{x}_N \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{6}$$

と変形できる．これを，基底行列 $\boldsymbol{A}_B$ における線形計画問題 (4) の**辞書**あるいは**基底形式表現**という．この辞書から線形計画問題の基底解 $(\boldsymbol{x}_B, \boldsymbol{x}_N) = (\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{0})$ と，そのときの目的関数値 $\boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}$ を簡単に得ることができる．また，定理 3.3 より，次の結果が得られる．

系 3.4 辞書 (6) において，等式右辺の定数項ベクトル $\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}$ ならびに目的関数における非基底変数の係数ベクトル $(\boldsymbol{c}_N^T - \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{A}_N)$ のすべての要素が 0 以上ならば，基底解 $(\boldsymbol{x}_B, \boldsymbol{x}_N) = (\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{0})$ は，線形計画問題 (4) の最適解である．また，対応する双対問題の基底解も最適解である．

この系の条件をみたすとき，辞書 (6) を主双対最適な辞書と呼ぶ．主双対最適な辞書を見つければ，主問題と双対問題の最適解を同時に求めることができる．シンプレックス法は，主双対最適な辞書を見つける方法である．

3.2.2 辞書の更新

標準形の線形計画問題 (4) の基底行列 $\boldsymbol{A}_B$ における辞書 (6) を実際に計算したところ

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \omega_0' + c_{i_{m+1}}' x_{i_{m+1}} + \cdots + c_{i_n}' x_{i_n} \\ \text{制約条件} & x_{i_1} = b_{i_1}' - a_{i_1 i_{m+1}}' x_{i_{m+1}} - \cdots - a_{i_1 i_n}' x_{i_n} \\ & \vdots \\ & x_{i_m} = b_{i_m}' - a_{i_m i_{m+1}}' x_{i_{m+1}} - \cdots - a_{i_m i_n}' x_{i_n} \\ & (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \geq \boldsymbol{0}. \end{array} \tag{7}$$

となっているとする．ここで，$I_B = \{i_1, i_2, \cdots, i_m\}$ が基底変数の添え字の集合であり，$I_N = \{i_{m+1}, i_{m+2}, \cdots, i_n\}$ が非基底変数の添え字の集合である．

基底変数の１つと非基底変数の１つを交換することを考える．すなわち，基底変数 x_r $(r \in I_B)$ と非基底変数 x_s $(s \in I_N)$ をそれぞれ１つずつ選んで，x_s を新しく基底変数とし，x_r を非基底変数とする辞書と基底解を求める．

定理 3.5 辞書 (7) において $a_{rs}' \neq 0$ であるならば，基底変数 x_r $(r \in I_B)$ と非基底変数 x_s $(s \in I_N)$ を入れ替えた基底解が存在する．

この新しい基底解に対する辞書は，元の線形計画問題から定義に従い計算することも可能である．しかし，その方法では多くの計算量を必要とするので，すでに求められている辞書 (7) から簡単に計算する方法を説明する．辞書 (7) における基底変数 x_r についての等式制約を

$$x_r = b_r' - a_{r i_{m+1}}' x_{i_{m+1}} - \cdots - a_{rs}' x_s - \cdots - a_{r i_n}' x_{i_n} \tag{8}$$

とする．$a'_{rs} \neq 0$ であるので，x_s を含む項を左辺に移動し，x_r の項を右辺に移動した後に，両辺を a'_{rs} で割ることにより

$$x_s = \frac{b'_r}{a'_{rs}} - \frac{a'_{ri_{m+1}}}{a'_{rs}} x_{i_{m+1}} - \cdots - \frac{1}{a'_{rs}} x_r - \cdots - \frac{a'_{ri_n}}{a'_{rs}} x_{i_n} \tag{9}$$

が得られる．辞書 (7) における等式制約 (8) を上の等式制約 (9) に入れ替え，その他の制約式と目的関数の x_s に式 (9) を代入することにより新しい辞書ができる．たとえば，目的関数は

$$\begin{aligned}
&\omega'_0 + c'_{i_{m+1}} x_{i_{m+1}} + \cdots + c'_s x_s + \cdots + c'_{i_n} x_{i_n} \\
&= \left(\omega'_0 + \frac{c'_s b'_r}{a'_{rs}}\right) + \left(c'_{i_{m+1}} - \frac{c'_s a'_{ri_{m+1}}}{a'_{rs}}\right) x_{i_{m+1}} + \cdots \\
&\qquad - \frac{c'_s}{a'_{rs}} x_r + \cdots + \left(c'_{i_n} - \frac{c'_s a'_{ri_n}}{a'_{rs}}\right) x_{i_n}
\end{aligned}$$

と計算でき，その他の等式制約も同様にできる．この結果，基底変数 x_r $(r \in I_B)$ と非基底変数 x_s $(s \in I_N)$ を入れ替えた基底解における新しい辞書が計算できる．

3.3 主シンプレックス法

定理 3.2 より，標準形の線形計画問題に最適解が存在するならば，最適基底解が存在する．したがって，最適解を求める一つの方法として，基底解のみを対象として，最適基底解を求めることが考えられる．シンプレックス法はそのような方法であり，基底解の更新の仕方により，いくつかの種類がある．主シンプレックス法は，主問題の実行可能基底解のみを対象として更新することにより，最適基底解を求めようとする方法である．

3.3.1 初期実行可能基底解が得られる場合

線形計画問題に最適解が存在するとき，異なる基底解を次々に生成することができれば，有限回で最適基底解を見つけることができる．しかし，無意味に基底解を生成したのでは，効率よく最適解を求められるとはいえない．そこで，主シンプレックス法では，はじめに一つの実行可能基底解と辞書が求められているとき，各反復で，3.2.2 節で示したようにひと組の基底変数と非基底変数を入れ替えることにより，新しい基底解と辞書を効率よく計算する．このとき，さらに次の 2 点が保証されるように基底解を更新する．

1. 各反復で生成される基底解は，主問題の実行可能基底解である．
2. 各反復で生成される基底解での主問題の目的関数値が増加しない．

この 2 つの性質が，主シンプレックス法の特徴であり，他のシンプレックス法との違いである．

主シンプレックス法の反復において，標準形の線形計画問題の基底行列 $\boldsymbol{A}_B$ における実行可能基底解とそのときの辞書

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & \omega'_0 + c'_{i_{m+1}} x_{i_{m+1}} + \cdots + c'_{i_n} x_{i_n} \\
\text{制約条件} & x_{i_1} = b'_{i_1} - a'_{i_1 i_{m+1}} x_{i_{m+1}} - \cdots - a'_{i_1 i_n} x_{i_n} \\
& \vdots \\
& x_{i_m} = b'_{i_m} - a'_{i_m i_{m+1}} x_{i_{m+1}} - \cdots - a'_{i_m i_n} x_{i_n} \\
& (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \geq \boldsymbol{0}.
\end{array}
\tag{10}
$$

が得られているものとする．基底解が実行可能なので，$b'_{i_k} \geq 0$ $(i_k \in I_B)$ が成り立っている．定理 3.3 より，実行可能基底解において，

$$\boldsymbol{c}_N - \boldsymbol{A}_N^T (\boldsymbol{A}_B^T)^{-1} \boldsymbol{c}_B \geq \boldsymbol{0}$$

が成り立っていれば，それは最適基底解である．すなわち，上の辞書の目的関数において，非基底変数の係数 c'_{i_k} $(i_k \in I_N)$ がすべて 0 以上ならば，最適基底解が得られる．この場合には，主シンプレックス法を終える．さもなければ，$c'_{i_k} < 0$ となる $i_k \in I_N$ が存在するので，そのような添字 $s \in I_N$ を定める．$c'_s < 0$ であるので，変数 x_s を 0 から増加させれば，目的関数が減少する．実際，上の辞書から，他の非基底変数の値を 0 のまま，x_s のみを変化させると，目的関数値は，

$$\omega'_0 + c'_s x_s$$

と変化し，基底変数は，等式制約 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ をみたすために，

$$
\begin{array}{l}
x_{i_1} = b'_{i_1} - a'_{i_1 s} x_s \\
\vdots \\
x_{i_m} = b'_{i_m} - a'_{i_m s} x_s
\end{array}
$$

と変化する．このように変化させた解が実行可能解であるためには，上の基底変数の値が 0 以上でなければならないので，変数 x_s の値を

$$x_s^* = \sup \left\{ x_s | x_{i_k} = b'_{i_k} - a'_{i_k s} x_s \geq 0,\ \forall i_k \in I_B \right\}$$

以下とする必要がある．もしすべての $i \in I_B$ に対して $a'_{is} \leq 0$ であるならば，この $x_s^* = \infty$ となる．すなわち，任意の $x_s \geq 0$ に対して，実行可能解が得られることになり，目的関数値 $\omega'_0 + c'_s x_s$ に下界が存在しないので，問題が非有界であることが判明する．こ

の場合には，主シンプレックス法を終える．さもなければ，$a'_{is} > 0$ となる $i \in I_B$ が存在し，x_s^* の値が有限である．$x_s = x_s^*$ において 0 となる基底変数が存在するので，それを x_r とする，あるいは，同じことであるが

$$\min \left\{ \frac{b'_{i_k}}{a'_{i_k s}} \middle| a'_{i_k s} > 0,\ i_k \in I_B \right\}$$

を達成する添字 $i_k \in I_B$ を r とする．このようにして定めた変数 x_r を基底から出すことにより，次に得られる基底解も実行可能となる. .

以上のことから，現在の基底変数の集合から，x_s を基底変数に入れ，x_r を基底変数から出すことにより，新しい基底変数の集合を定め，3.2.2 節の方法により辞書を更新する．主シンプレックス法では，最適基底解が求まるか，問題が非有界であることが判明するまで，上記の操作を繰り返す．

アルゴリズム 3.6 初期実行可能基底解が既知の場合の主シンプレックス法は，次のようなステップから成る．

ステップ 0　初期実行可能基底解に対して，辞書 (10) を求める．

ステップ 1　辞書の目的関数において，非基底変数の係数 c'_{i_k} $(i_k \in I_N)$ がすべて 0 以上ならば，最適基底解が得られているので，終了する．

ステップ 2　非基底変数の係数 c'_{i_k} $(i_k \in I_N)$ が負となる変数の添え字 $s \in I_N (c'_s < 0)$ を１つ選ぶ．

ステップ 3　すべての $i_k \in I_B$ に対して $a'_{i_k s} \leq 0$ であるならば，問題が非有界であるので，終了する．

ステップ 4　$a'_{i_k s} > 0$ である添え字 $i_k \in I_B$ のなかで，$\frac{b'_{i_k}}{a'_{i_k s}}$ を最小とする添え字 $r \in I_B$ を定める．

ステップ 5　x_s を基底変数に入れ，x_r を基底変数から出し，3.2.2 節の方法により辞書を更新し，ステップ 1 へ戻る．

主シンプレックス法では，次の 3 つの場合が起こりえる．

1. 最適解を得る．
2. 問題が非有界であることが判明する．
3. 無限に繰り返される．

基底変数の組の数は有限であるので，3 番目の場合には，同じ辞書が 2 度以上あらわれる．これを**巡回現象**という．ここで，次の仮定をおく．

仮定 3.7 (非退化の仮定) 線形計画問題 (4) の任意の実行可能基底解で基底変数の値が正である（0 でない）.

この仮定のもとでは，主シンプレックス法で基底解を更新するときに，必ず目的関数値が減少する．基底解の数が有限なので，次の結果が得られる．

定理 3.8 仮定 3.7 を満たし，初期実行可能基底が得られている線形計画問題 (4) に主シンプレックス法を適用すれば，各反復で目的関数値が必ず減少し，有限回の反復で最適解を得るか，非有界であることが判明する．

退化している場合には，巡回現象を起こさない工夫が必要である．

3.3.2 **2 段階シンプレックス法**

線形計画問題の初期実行可能基底解が得られない場合には，次のような第 1 段階と第 2 段階からなる 2 段階シンプレックス法を使う．

第１段階 実行可能基底解をもつ人工的な線形計画問題を作成し，それをシンプレックス法で解くことにより，元の線形計画問題が実行不能であることを判定できるか，あるいは実行可能基底解を見つける．

第２段階 第 1 段階で見つけた実行可能基底解を初期点として，シンプレックス法により最適解を見つけるか，問題が非有界であることを判定できる．

標準形の線形計画問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{制約条件} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
& (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \geq \mathbf{0}.
\end{array}
\tag{11}
$$

を解くための 2 段階シンプレックス法を解説する．すべての $b_i \geq 0$ $(i \in \mathcal{N}_m)$ であると仮定する．もしある $b_i < 0$ ならばその式の両辺に -1 を乗ずる．

第１段階において，**人工変数** (artificial variable)$x_{n+1}, \cdots x_{n+m}$ を導入し，次の**人工問題** (artificial problem) を作成する．

$$\begin{array}{lrcl}
\text{最小化} & \omega & = & x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+m} \\
\text{制約条件} & x_{n+1} & = & b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n \\
 & x_{n+2} & = & b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - \cdots - a_{2n}x_n \\
 & & & \vdots \\
 & x_{n+m} & = & b_m - a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 \cdots - a_{mn}x_n \\
 & & & (x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+m})^T \geq \mathbf{0}
\end{array} \tag{12}$$

この問題では，すべての人工変数が 0 となれば，元の問題 (11) の実行可能解が得られるようになっている．目的関数 (ω とおいている) は，人工変数の和になっているので，その値が 0 以上であり，0 ならばすべての人工変数が 0 となる．この目的関数において，等式制約を使って人工変数を消去すると

$$\omega = \sum_{i=1}^{m} b_i - (\sum_{i=1}^{m} a_{i1})x_1 - (\sum_{i=1}^{m} a_{i2})x_2 - \cdots - (\sum_{i=1}^{m} a_{in})x_n$$

となる．この目的関数を使うことにより，人工問題は，

$$\begin{array}{lrcl}
\text{最小化} & \omega & = & \sum b_i - (\sum a_{i1})x_1 - (\sum a_{i2})x_2 - \cdots - (\sum a_{in})x_n \\
\text{制約条件} & x_{n+1} & = & b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n \\
 & x_{n+2} & = & b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - \cdots - a_{2n}x_n \\
 & & & \vdots \\
 & x_{n+m} & = & b_m - a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 \cdots - a_{mn}x_n \\
 & & & (x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+m})^T \geq \mathbf{0}.
\end{array} \tag{13}$$

となる．この問題 (13) は，次のような特徴を持つ．

1. $x_{n+1}, \cdots, x_{n+m}$ を基底変数とする辞書となっている．
2. $(x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+m}) = (0, 0, \cdots, 0, b_1, \cdots, b_m)$ は実行可能基底解である．
3. 実行可能でかつ目的関数が有界なので，最適解を持つ．また，その最適値は 0 以上である．
4. 元の問題 (11) が実行可能ならば $\omega = 0$ が最適値であり，その逆も成り立つ．任意の最適解 $(x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+m})$ において，$x_{n+1} = x_{n+2} = \cdots = x_{n+m} = 0$ である．このとき，人工変数を除いた解 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ は，元の問題の実行可能解である．
5. 元の問題 (11) が実行不能ならば最適値は正であり，その逆も成り立つ．

上の初期辞書 (13) から，人工問題に主シンプレックス法を適用すると，最適解を持つので，最適基底解が得られる．そのときの辞書を

$$
\begin{array}{llcl}
\text{最小化} & \omega & = & \omega^* + \bar{d}_{j_1}x_{j_1} + \bar{d}_{j_2}x_{j_2} + \cdots + \bar{d}_{j_n}x_{j_n} \\
\text{制約条件} & x_{i_1} & = & \bar{b}_1 - \bar{a}_{1j_1}x_{j_1} - \bar{a}_{1j_2}x_{j_2} - \cdots - \bar{a}_{1j_n}x_{j_n} \\
 & & \vdots & \\
 & x_{i_m} & = & \bar{b}_m - \bar{a}_{mj_1}x_{j_1} - \bar{a}_{mj_2}x_{j_2} - \cdots - \bar{a}_{mj_n}x_{j_n} \\
 & & & (x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+m})^T \geq 0
\end{array}
\tag{14}
$$

とする．辞書より，最適解 $(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*, x_{n+1}^*, \cdots, x_{n+m}^*)$ と最適値 ω^* が得られる．そして，$\omega^* > 0$ ならば元の線形計画問題 (11) は実行不能であり，$\omega^* = 0$ ならば実行可能である．後者の時には，次のように場合分けして処理を行う．

場合１　辞書 (14) の基底変数 $x_{i_1}, \cdots, x_{i_m}$ の中に人工変数が含まれない場合（人工変数の値がゼロであるので，人工変数は一般に非基底変数となっているが，退化しているときには基底変数になっていることもある）には，この辞書で人工変数にかかわるすべての項を除去する．その後，元の線形計画問題 (11) の目的関数 $\sum c_j x_j$ に辞書 (14) の中で表わされた基底変数 $x_{i_1}, \cdots, x_{i_m}$ の式を代入し，目的関数を非基底変数のみで表わす．これにより，元の問題の (実行可能基底解をあらわす) 辞書が得られ，そこから主シンプレックス法を適用することができる．これが，２段階シンプレックス法の第２段階であり，元の問題の最適解を得るか，あるいは非有界であることがわかる．

場合２　基底変数 $x_{i_1}, \cdots, x_{i_m}$ の中に人工変数が含まれる場合には，3.2.2 節の辞書の更新により，基底変数となっている人工変数を１つずつ非基底変数に変換することができる．その結果，すべての基底変数が人工変数でない辞書を得ることができ，上の場合１を適用する．

以上のことをまとめると，次のようになる．

アルゴリズム 3.9　２段階シンプレックス法は，次のステップから成る．

ステップ１　標準形の線形計画問題に人工変数を導入し，人工的な線形計画問題を作り，初期辞書 (13) を求める．

ステップ２　その辞書からシンプレックス法を適用することにより人工問題を解き，最適基底解とその時の辞書 (14) を求める．その結果，人工問題の最適値が正 ($\omega^* > 0$) ならば，元の問題 (11) は実行不能であり，終了する．さもなければ，つぎのステップへ進む．

ステップ３　基底変数に人工変数が含まれている場合には，人工変数でない非基底変数と入れ換えるなどしたのちに，辞書 (14) から人工変数を削除する．元の問題の目的関数を非基底変数で表わすことにより，元の問題 (11) の辞書を得る．

ステップ４　ステップ３で求めた辞書から，シンプレックス法を適用することにより，最適解を得るか，問題が非有界であることがわかる．

そして，次の結果が得られる．

定理 3.10 標準形の線形計画問題と人工問題 (12) が非退化の仮定 3.7 をみたすとき，2 段階シンプレックス法により有限回の反復で，実行不能である，あるいは非有界であることを判定できるか，さもなければ最適解基底解を求めることができる．

参考文献

[1] 水野眞治：学習用テキスト線形計画法 (3) シンプレックス法，Web 上のテキスト，http://www.me.titech.ac.jp/~mizu_lab/text/ (2010)