オペレーションズリサーチ 2010 (7)

7　AHP(階層分析法)

7.1　例題（パソコンの機種選定問題）

佐藤君は、パソコンを購入しようとしている。候補となっている機種を A, B, C に絞ったが、メーカー、デザイン、性能、価格などが異なるため、どれに決定したらよいか、迷っている。佐藤君の好みに合わせて購入機種を選ぶ問題を OR 的に解決せよ。

7.2　AHP の概略

パソコンの機種選定問題のように、いくつかの代替案 (A,B,C) の中から、何らかの評価基準 (メーカー、デザイン、性能、価格) に従い、最も適した代替案を選択する問題を解決する OR の手法として、**AHP** (Analytic Hierarchy Process) がある。AHP は、次のような手順からなる。

ステップ 1: 問題、評価基準、代替案の間の**階層図**を作成する。（問題によっては、代替案の候補、評価基準などもここで決める必要がある。）

ステップ 2: 階層図の各レベルについて、上の項目からみた下の項目の**ウエイト**を決定する。このウエイトの決定には、項目間の**一対比較**を利用する。

ステップ 3: 階層図に基づき、各レベルのウエイトを使い、問題に対する各代替案の**総合ウエイト**を求める。

ステップ 4: 階層図、ウエイト、総合ウエイトなどを参考にし、選択すべき代替案を決める。

7.3　階層図

パソコンの機種選定問題のように、代替案 (A,B,C) とその評価基準 (メーカー、デザイン、性能、価格) が決まったら、その間の階層図を作成する。もっとも単純な階層図は、図 1 のようになる。評価基準によっては、より複雑な階層構造とすることもできる。

7.4　一対比較

AHP では、階層図の各レベルでウエイトを決定する。まず、階層の 1 番上（レベル 1）にある問題から見た次の階層（レベル 2）の評価基準のウエイトを求める。そのために、評価基準間の一対比較を行う。この一対比較では、それを行う個人の価値観が反映される。4 つの評価基準があるので、2 つずつ計 6 通りの比較を行う。まず、評価基準のメーカーとデザインについて、パソコンの機種選定問題においてどちらがより重要であるか、意思決定者である佐藤君に質問をし、その答から表 1 に従い一対比較値を決める。

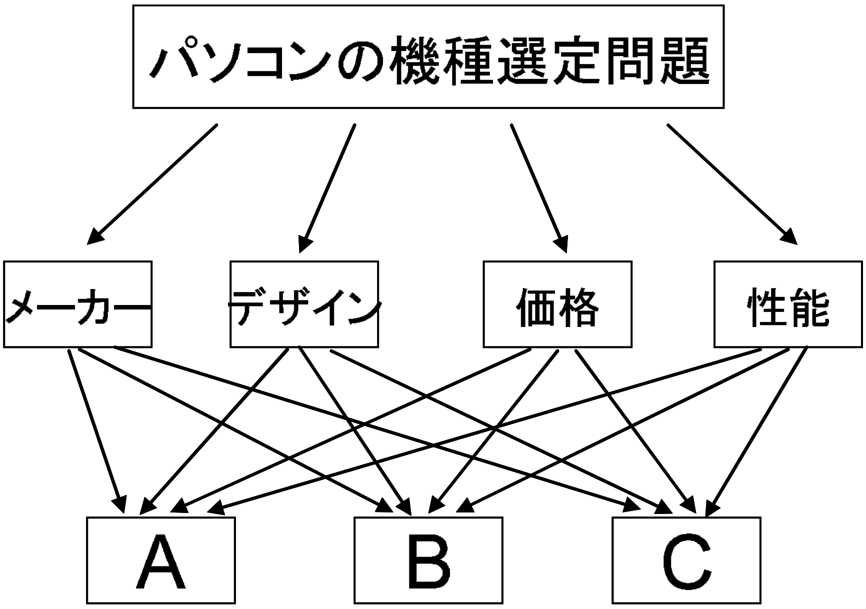

図 1: パソコンの機種選定問題の階層図

表 1: 一対比較値

一対比較値	意　味
1	両方の項目が同じぐらい重要
3	前の項目が後の項目より若干重要
5	前の項目が後の項目より重要
7	前の項目が後の項目よりかなり重要
9	前の項目が後の項目より絶対的に重要
2,4,6,8	補間的に用いる
上の数値の逆数	後の項目から前の項目を見た場合

表 2: 評価基準間の一対比較表

	メーカー	デザイン	性　能	価　格
メーカー	1	3	1/3	1/5
デザイン	1/3	1	1/5	1/7
性能	3	5	1	1/3
価格	5	7	3	1

例えば、メーカーがデザインより若干重要であると答えたならば、一対比較値は 3 であり、表 2 のメーカーから横に見て縦がデザインのところに 3 を記入し、デザインから横に見て縦がメーカーのところにその逆数 $\frac{1}{3}$ を記入する。同様に、すべての 2 項目間の比較を行い、表 2 に一対比較値を記入する。ただし、同じ項目間の間の一対比較値を 1 とする。このようにして得られる表 2 を**一対比較表**という。

7.5　ウエイトの決定

一対比較表 (表 2) から、評価基準のウエイトを計算する。まず、表 2 の上からメーカーを 1 行目、デザインを 2 行目と順に番号を付け、同様に左からメーカーを 1 列目、デザインを 2 列目と順に番号を付けたとき、i 行 j 列の値を a_{ij} とすることにより、4×4 行列 A ができる。この場合、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1/3 & 1/5 \\ 1/3 & 1 & 1/5 & 1/7 \\ 3 & 5 & 1 & 1/3 \\ 5 & 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。これを**一対比較行列**という。

ここで、メーカー、デザイン、性能、価格の本来のウエイトが順に $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3, \bar{w}_4$ であるとし、i 番目と j 番目の評価基準の一対比較値がウエイトの比 $\bar{w}_i/\bar{w}_j$ を表していると仮定する。このとき、一対比較行列は

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & \bar{w}_1/\bar{w}_2 & \bar{w}_1/\bar{w}_3 & \bar{w}_1/\bar{w}_4 \\ \bar{w}_2/\bar{w}_1 & 1 & \bar{w}_2/\bar{w}_3 & \bar{w}_2/\bar{w}_4 \\ \bar{w}_3/\bar{w}_1 & \bar{w}_3/\bar{w}_2 & 1 & \bar{w}_3/\bar{w}_4 \\ \bar{w}_4/\bar{w}_1 & \bar{w}_4/\bar{w}_2 & \bar{w}_4/\bar{w}_3 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

となっている。この一対比較行列 $\bar{A}$ とウエイトのベクトル $\bar{w} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3, \bar{w}_4)^T$ の間には、簡単な計算により

$$\bar{A}\bar{w} = 4\bar{w}$$

という関係式が成り立っている。すなわち、ウエイトベクトル $\bar{w}$ が行列 $\bar{A}$ の固有値 4 に対する固有ベクトルとなっていることがわかる。また、この行列 $\bar{A}$ のランクは 1 であり、4 以外の固有値は 0 だけである。

表 3: ウエイトの簡易計算

	メーカー	デザイン	性　能	価　格	幾何平均	ウエイト
メーカー	1	3	1/3	1/5	$\sqrt[4]{\frac{3}{15}} = 0.669$	$\frac{0.669}{5.677} = 0.118$
デザイン	1/3	1	1/5	1/7	$\sqrt[4]{\frac{1}{105}} = 0.312$	$\frac{0.312}{5.677} = 0.055$
性能	3	5	1	1/3	$\sqrt[4]{\frac{15}{3}} = 1.495$	$\frac{1.495}{5.677} = 0.263$
価格	5	7	3	1	$\sqrt[4]{105} = 3.201$	$\frac{3.201}{5.677} = 0.574$

AHP では、上のような一対比較行列 $\bar{A}$ とウエイトベクトル $\bar{w}$ の関係が、今回の例題でも成立していると考え、一対比較行列 A の最大固有値 λ_{max} に対する固有ベクトル $w = (w_1, w_2, w_3, w_4)^T$ の各成分の値をウエイトとする。ただし、固有ベクトルを定数倍したものは固有ベクトルであるので、$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 1$, $w \geq 0$ となるように正規化する。このようなウエイトが得られない場合には、一対比較をやり直す。

一対比較行列とウエイトが上記の条件 (1) をみたすならば、最大固有値 λ_{max} は、評価基準の数 n（この場合 $n = 4$) に等しくなるはずであるが、一般には

$$\lambda_{max} \geq n$$

が成立する。したがって、最大固有値 λ_{max} が n に近い値であれば、一対比較行列は整合性があるといわれ、そのままウエイトを採用するが、整合性があまりない（λ_{max} が n よりかなり大きい）場合には、一対比較をやり直す。

具体的には、最大固有値 λ_{max} と n の差を最大固有値以外の固有値の数 $n-1$ で割った値

$$C.I. = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}$$

を**整合度** (Consistency Index) といい、この値が 0.1（場合により 0.15) より小さければ合格とする。

7.6　ウエイトの簡易計算

AHP では、一対比較行列の固有ベクトルの値を理論的にウエイトとして採用する。このウエイトは、計算機とソフトを使えば計算できるが、電卓などを使い簡易的に近似計算することもある。

行列 $\bar{A}$ の第 1 行にある要素の幾何平均を求めると $\frac{\bar{w}_1}{\sqrt[4]{\bar{w}_1\bar{w}_2\bar{w}_3\bar{w}_4}}$ となる．同様に，第 2，3，4 行の幾何平均が $\frac{\bar{w}_2}{\sqrt[4]{\bar{w}_1\bar{w}_2\bar{w}_3\bar{w}_4}}$，$\frac{\bar{w}_3}{\sqrt[4]{\bar{w}_1\bar{w}_2\bar{w}_3\bar{w}_4}}$，$\frac{\bar{w}_4}{\sqrt[4]{\bar{w}_1\bar{w}_2\bar{w}_3\bar{w}_4}}$ となる．したがって，それらの比は，$\bar{w}_1 : \bar{w}_2 : \bar{w}_3 : \bar{w}_4$ となる．このことから，表 2 の横の数字の幾何平均を計算し、和が 1 となるように正規化した値をウエイトとして採用する。この場合、表3のように幾何平均とウエイトを計算することができる。

行列 A の最大固有値 λ_{max} は，固有ベクトル w に対して $Aw = \lambda_{max} w$ をみたすので，ベクトル Aw の各要素をベクトル w の各要素の値で割った値に等しい．したがって，上のようにして計算したウエイトを並べたベクトルを $w' = (w'_1, w'_2, w'_3, w'_4)^T$ とするとき、ベク

トル Aw' の各要素をベクトル w' の各要素で割った値を順に $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ とするとき、この値の平均 $\bar{\lambda} = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)/4$ を最大固有値の近似値とする．そして，整合度として

$$\frac{\bar{\lambda} - n}{n - 1}$$

を使用する．

7.7　総合ウエイトの計算

例題を使って説明する。レベル1と同様に、レベル2においても各評価基準ごとにレベル3にある代替案の一対比較を行い、そのウエイトを計算する。ここでは、メーカについて代替案A,B,Cについて計算したウエイトの値を u_{11}, u_{12}, u_{13} とし、同様にデザイン、性能、価格についての代替案A,B,Cについて計算したウエイトの値を順に $u_{21}, u_{22}, \cdots, u_{43}$ とする。このとき、元の問題から見た代替案Aの総合ウエイト w_A を各評価基準のウエイトとそれについてのAのウエイトの積の和とする：

$$w_A = w_1 u_{11} + w_2 u_{21} + w_3 u_{31} + w_4 u_{41}.$$

同様にして、代替案B, Cの総合ウエイト w_B と w_C の値を計算する。

7.8　AHPによる結果の使い方と注意

意思決定問題にAHPを適用することにより、問題の階層図、各レベルのウエイト、総合ウエイトなどが得られる。これらを利用して、意思決定者に最も適した代替案を選択することができる。たとえば、総合ウエイトが最大となる代替案を選択するというのがひとつの決め方である。このとき、単にウエイトの大小だけでなく、第2位あるいは3位のウエイトとの差が小さければ、それらも大差のない候補であるといえる。また、これらの結果すべてを意思決定者に説明することにより、AHPには入れられなかった評価基準と一緒に判断するための材料とすることもできる。さらに、整合度を見ることにより、判断の整合性をチェックすることもできる。

また、AHPを実施するうえで、次のような点に注意すると良いといわれている。

- 同一レベルに入れる要素は互いに独立性の高い（関連性の低い）ものを採用する。
- 一対比較の対象は、7個程度以内にする。

参考図書：刀根薫著：「ゲーム感覚意思決定法　AHP入門」日科技連、1986.