学習・研究用テキスト 内点法 (3C)

主双対アフィンスケーリング法

水野 眞治

東京工業大学 大学院社会理工学研究科 経営工学専攻

http://www.me.titech.ac.jp/~mizu_lab/text/

2010 年 11 月 9 日

概要

線形計画問題の主問題と双対問題を同時に解く主双対アフィンスケーリング法を解説し，ステップサイズを適切に選ぶことにより，その反復回数が多項式オーダとなることを示す．

目次

1 主双対アフィンスケーリング法

はじめに，線形計画問題の主問題と双対問題を合わせた主双対問題を述べ，その主双対問題に対するアフィンスケーリング法を説明する．その後に，中心パスの近傍を使ってステップサイズを適切に選ぶことにより，反復回数が多項式オーダ $O(nL^2)$ となることを示す.

1.1 主双対問題

n 個の非負変数と m 個の等式制約をもつ標準形の線形計画問題は,

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{1}$$

と表される．これを主問題とするとき，双対問題は

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{z}\geq\boldsymbol{0} \end{array} \tag{2}$$

となる．主問題の実行可能解 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ と双対問題の実行可能解 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_m)$，$\boldsymbol{z}=(z_1,z_2,\cdots,z_n)^T$ が相補性条件

$$x_iz_i=0,\ i=1,2,\cdots,n$$

を満たすならば，この $\boldsymbol{x}$ と $(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ はそれぞれの問題の最適解である．上の相補性条件は，ベクトル $\boldsymbol{x}$ の各要素を対角要素とする対角行列を $\boldsymbol{X}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{x})$ とすれば，$\boldsymbol{X}\boldsymbol{z}=\boldsymbol{0}$ とあらわすことができる．したがって，$\boldsymbol{x}$ が主問題の最適解であり，$(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ が双対問題の最適解であるならば

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{X}\boldsymbol{z}=\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{z}\geq\boldsymbol{0} \end{array} \tag{3}$$

を満たす．逆に，ベクトル $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ が上記 (3) の条件をすべて満たすならば, $\boldsymbol{x}$ は主問題の最適解であり，$(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ は双対問題の最適解である．ゆえに，(3) を満たす解を求めることにより，線形計画問題の主問題と双対問題を同時に解くことができる．この条件 (3) を満たす $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ を求める問題を**主双対問題**と呼び，このときの $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ を**最適解**と呼ぶ. 上記 (3) において，相補性条件 $X\boldsymbol{z}=\boldsymbol{0}$ 以外の条件を満たす点を主双対問題の**実行可能解**といい，さらに $\boldsymbol{x}>0$ と $\boldsymbol{z}>\boldsymbol{0}$ を満たす点を主双対問題の**実行可能内点**という.

ここで，次の仮定を置く.

仮定 1.1 $m\times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ のランクが m である.

仮定 1.2 主双対問題に実行可能内点が存在し，一つの内点 $(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{y}^0,\boldsymbol{z}^0)$ が既知である.

これらの仮定が成り立つとき，主双対問題 (3) は最適解をもち，最適解の集合が有界となる.

1.2 アフィンスケーリング法

線形計画問題の主双対問題を解くアフィンスケーリング法は，Monteiro, Adler, and Resende[1] によって提案された．アフィンスケーリング法では，初期の実行可能内点

$(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{z}^0)$ から内点の列 $\{(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)\}$ を生成する．そこで，k 番目の内点 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)$ が得られているとして，次の内点の求め方を示す．

内点 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)$ は，実行可能であるので

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^k + \boldsymbol{z}^k = \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{x}^k > \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{z}^k > \boldsymbol{0} \end{array} \tag{4}$$

を満たす．関数

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} - \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{X}\boldsymbol{z} \end{pmatrix}$$

を定義すると，主双対問題 (3) の最適解は，方程式系

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{0} \tag{5}$$

の解である．この方程式系 (5) の近似解を求めるためにニュートン法を使い，計算した方向をアルゴリズムの探索方向として採用する．点 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)$ における方程式系 (5) のニュートン方向 $(\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{y}, \Delta\boldsymbol{z})$ は，線形方程式系

$$\nabla\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k) \begin{pmatrix} \Delta\boldsymbol{x} \\ \Delta\boldsymbol{y} \\ \Delta\boldsymbol{z} \end{pmatrix} = -\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)$$

あるいは

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}^T & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{Z}_k & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\boldsymbol{x} \\ \Delta\boldsymbol{y} \\ \Delta\boldsymbol{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{z}^k \end{pmatrix} \tag{6}$$

の解である．ここで，$\boldsymbol{E}$ は単位行列，$\boldsymbol{0}$ はそれぞれ適当なサイズのゼロベクトルあるいはゼロ行列，$\boldsymbol{X}_k = \mathrm{diag}(\boldsymbol{x}^k)$，$\boldsymbol{Z}_k = \mathrm{diag}(\boldsymbol{z}^k)$ である．この解 $(\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{y}, \Delta\boldsymbol{z})$ は，**(主双対) アフィンスケーリング方向**と呼ばれる．線形方程式系 (6) の解は，順に

$$\begin{array}{l} \Delta\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}_k^{-1}\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{A}^T)^{-1}\boldsymbol{b} \\ \Delta\boldsymbol{z} = -\boldsymbol{A}^T\Delta\boldsymbol{y} \\ \Delta\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{Z}_k^{-1}\boldsymbol{X}_k\Delta\boldsymbol{z} - \boldsymbol{x}^k \end{array} \tag{7}$$

と計算できる．内点 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)$ から，この方向 $(\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{y}, \Delta\boldsymbol{z})$ へステップサイズ α だけ進んだ次の点を

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}^{k+1} \\ \boldsymbol{y}^{k+1} \\ \boldsymbol{z}^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}^k \\ \boldsymbol{y}^k \\ \boldsymbol{z}^k \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} \Delta\boldsymbol{x} \\ \Delta\boldsymbol{y} \\ \Delta\boldsymbol{z} \end{pmatrix} \tag{8}$$

とする．ただし，この点が実行可能な内点となるよう，$\boldsymbol{x}^{k+1} > \boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{y}^{k+1} > \boldsymbol{0}$ を満たすステップサイズ $\alpha > 0$ を決める必要がある．このとき，(4) と (6) より，

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{k} + \alpha\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^{k+1} + \boldsymbol{z}^{k+1} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^{k} + \boldsymbol{z}^{k} + \alpha(\boldsymbol{A}^T\Delta\boldsymbol{y} + \Delta\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{c} \end{array}$$

となるので，$(\boldsymbol{x}^{k+1}, \boldsymbol{y}^{k+1}, \boldsymbol{z}^{k+1})$ は，主双対問題 (3) の実行可能内点となる．

アルゴリズム 1.3 主双対アフィンスケーリング法は，次のステップから成る．

ステップ 0　主双対問題 (3) の初期内点を $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{z}^0)$ とし，$k = 0$ とする．
ステップ 1　点 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)$ において，式 (7) により探索方向 $(\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{y}, \Delta\boldsymbol{z})$ を計算する．
ステップ 2　ステップサイズ $\alpha > 0$ を決め，次の点 $(\boldsymbol{x}^{k+1}, \boldsymbol{y}^{k+1}, \boldsymbol{z}^{k+1})$ を式 (8) により求める．反復回数 k を 1 増加し，ステップ 1 へ戻る．

このアルゴリズムの途中で，十分小さな $\epsilon > 0$ に対して，$(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k \leq \epsilon$ が成立したならば，そのときの解を主双対問題 (3) の近似的な最適解として，アルゴリズムを終了することもできる．

1.3　多項式オーダの収束性

Monteiro, Adler, and Resende [1] に従い，前節で説明したアルゴリズム 1.3 の反復回数が多項式オーダとなることを示す．線形計画問題 (1) のサイズを L とするとき，[1] では，次の仮定をしている．

仮定 1.4 ある定数 $\mu_0 > 0$ に対して，主双対問題 (3) の初期内点 $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{z}^0)$ が

$$\boldsymbol{X}_0\boldsymbol{z}^0 = \mu_0\boldsymbol{e}$$

を満たす．また，$\mu_0 = 2^{O(L)}$ であるとする．

仮定 1.5 アルゴリズム 1.3 では，十分小さな定数 $\epsilon > 0$ に対して

$$(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k \leq \epsilon$$

を満たす主双対問題 (3) の実行可能解を求めたときに，終了するものとする．また，$1/\epsilon = 2^{O(L)}$ であるとする．

仮定 1.4 の条件 $\boldsymbol{X}_0\boldsymbol{z}^0 = \mu_0\boldsymbol{e}$ は，必ず満たされなければならないものではなく，ある定数 $\beta \in (0, 1)$ に対して $(1-\beta)\mu_0\boldsymbol{e} \leq \boldsymbol{X}_0\boldsymbol{z}^0 \leq (1+\beta)\mu_0\boldsymbol{e}$ と緩和できるが，以下の議論を簡単にするため，このように仮定する．

次に

$$
\begin{aligned}
L' &= \lceil \log(n\mu_0/\epsilon) \rceil \\
K &= nL'^2
\end{aligned}
$$

とする．ここで，$\lceil x \rceil$ は，x より小さくない最小の整数を表す，すなわち，$x \le \lceil x \rceil < x+1$ を満たす整数である．

以上の準備のもと，アルゴリズム 1.3 の各反復において，実行可能内点 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)$ が，$\mu_k = (\boldsymbol{x}^k)^T \boldsymbol{z}^k / n$ に対して，条件

$$\left(1 - \frac{k}{K}\right) \mu_k \boldsymbol{e} \le \boldsymbol{X}_k \boldsymbol{z}^k \tag{9}$$

あるいは

$$\|\boldsymbol{X}_k \boldsymbol{z}^k - \mu_k \boldsymbol{e}\| \le \frac{k}{K} \mu_k \tag{10}$$

のいづれか一方を満たすように，ステップサイズを定めるとする．仮定 1.4 より，$k=0$ のとき，どちらの条件も満たされている．次の定理で示されるように，ある定まったステップサイズにおいて，帰納的にこれらの条件が満たされる．

定理 1.6 アルゴリズム 1.3 の第 k 反復において，主双対問題 (3) の実行可能内点 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)$ が $\mu_k = (\boldsymbol{x}^k)^T \boldsymbol{z}^k / n$ に対して，条件 (9)(あるいは条件 (10)) を満たしているとする．このとき，ステップサイズ

$$\alpha = \frac{1}{nL'}$$

として式 (8) により次の点 $(\boldsymbol{x}^{k+1}, \boldsymbol{y}^{k+1}, \boldsymbol{z}^{k+1})$ を求めれば，その点も主双対問題 (3) の実行可能内点であり，$\mu_{k+1} = (\boldsymbol{x}^{k+1})^T \boldsymbol{z}^{k+1} / n$ に対して，条件 (9)(あるいは条件 (10)) を満たす．

この定理を証明するために，２つの補題を述べる．

補題 1.7 3 つの n 次ベクトル $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_n)^T$，$\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \cdots, q_n)^T$，$\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, \cdots, r_n)^T$ が $\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q} = \boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{p}^T \boldsymbol{q} = 0$ を満たすならば

$$|p_i q_i| \le \frac{1}{4} \|\boldsymbol{r}\|^2 \text{ for any } i \in \{1, 2, \cdots, n\}$$

と

$$\|\boldsymbol{P}\boldsymbol{q}\| \le \frac{\sqrt{2}}{4} \|\boldsymbol{r}\|^2$$

が成立する．ここで，$\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{p})$ は，ベクトル $\boldsymbol{p}$ の要素を対角要素とする対角行列である．

証明 $p_i > 0$ かつ $q_i > 0$ ならば，相加相乗平均の不等式より

$$4|p_i q_i| \leq (p_i + q_i)^2 = r_i^2$$

が成り立つ．この不等式は $p_i < 0$ かつ $q_i < 0$ のときも成り立つので

$$4 \sum_{p_i q_i > 0} |p_i q_i| \leq \sum_{p_i q_i > 0} r_i^2 \leq \|\boldsymbol{r}\|^2$$

が成り立つ．一方，$\boldsymbol{p}^T \boldsymbol{q} = 0$ より $\sum_{p_i q_i > 0} p_i q_i = -\sum_{p_i q_i < 0} p_i q_i$ であるので

$$4 \sum_{p_i q_i < 0} |p_i q_i| = 4 \sum_{p_i q_i > 0} |p_i q_i| \leq \|\boldsymbol{r}\|^2$$

も成り立つ．したがって，前者の不等式が成り立つ．後者の不等式も

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{P}\boldsymbol{q}\|^2 &= \sum_{i=1}^{n} (p_i q_i)^2 \\
&= \sum_{p_i q_i > 0} (p_i q_i)^2 + \sum_{p_i q_i < 0} (p_i q_i)^2 \\
&\leq \left(\sum_{p_i q_i > 0} |p_i q_i| \right)^2 + \left(\sum_{p_i q_i < 0} |p_i q_i| \right)^2 \\
&= 2 \left(\frac{1}{4} \|\boldsymbol{r}\|^2 \right)^2
\end{aligned}$$

より得られる． ▮

補題 1.8 アルゴリズム 1.3 の第 k 反復において，点 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)$ で計算される探索方向を $(\Delta \boldsymbol{x}, \Delta \boldsymbol{y}, \Delta \boldsymbol{z})$ とすれば,

$$|\Delta x_i \Delta z_i| \leq \frac{1}{4} n \mu_k$$

と

$$\|\Delta \boldsymbol{X} \Delta \boldsymbol{z}\| \leq \frac{\sqrt{2}}{4} n \mu_k$$

が成立する．ここで，$\mu_k = (\boldsymbol{x}^k)^T \boldsymbol{z}^k / n$，$\Delta \boldsymbol{X} = \mathrm{diag}(\Delta \boldsymbol{x})$ である．

証明 アルゴリズム 1.3 の第 k 反復において，点 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)$ で計算される探索方向を $(\Delta \boldsymbol{x}, \Delta \boldsymbol{y}, \Delta \boldsymbol{z})$ とすれば，式 (6) より

$$\boldsymbol{Z}_k \Delta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{X}_k \Delta \boldsymbol{z} = -\boldsymbol{X}_k \boldsymbol{z}^k$$

が成立する．$\boldsymbol{V}_k = (\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{Z}_k)^{0.5}$ として，この両辺に $\boldsymbol{V}_k^{-1}$ をかけると，$\boldsymbol{V}_k^2\boldsymbol{e} = \boldsymbol{X}_k\boldsymbol{z}^k$ より

$$\boldsymbol{V}_k^{-1}\boldsymbol{Z}_k\Delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{V}_k^{-1}\boldsymbol{X}_k\Delta\boldsymbol{z} = -\boldsymbol{V}_k\boldsymbol{e}$$

が得られる．ここで, $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{V}_k^{-1}\boldsymbol{Z}_k\Delta\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{V}_k^{-1}\boldsymbol{X}_k\Delta\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{V}_k\boldsymbol{e}$ とすれば, $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q} = \boldsymbol{r}$ かつ

$$\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{q} = \Delta\boldsymbol{x}^T\Delta\boldsymbol{z} = -\Delta\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\Delta\boldsymbol{y} = 0$$

となる．したがって，補題 1.7 より

$$|\Delta x_i\Delta z_i| = |p_iq_i| \leq \frac{1}{4}\|\boldsymbol{r}\|^2$$

かつ

$$\|\Delta\boldsymbol{X}\Delta\boldsymbol{z}\| = \|\boldsymbol{P}\boldsymbol{q}\| \leq \frac{\sqrt{2}}{4}\|\boldsymbol{r}\|^2$$

が成立する．ここで,

$$\|\boldsymbol{r}\|^2 = \boldsymbol{r}^T\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{V}_k^2\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k = n\mu_k$$

であるので，補題が成立する． ▌

定理 1.6 の証明 アルゴリズム 1.3 の第 k 反復において，点 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)$ で計算される探索方向を $(\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{y}, \Delta\boldsymbol{z})$ とすれば，任意のステップサイズ α に対して

$$\begin{aligned}
(x_i^k + \alpha\Delta x_i)(z_i^k + \alpha\Delta z_i) &= x_i^k z_i^k + \alpha(z_i^k\Delta x_i + x_i^k\Delta z_i) + \alpha^2\Delta x_i\Delta z_i \\
&= x_i^k z_i^k + \alpha(-x_i^k z_i^k) + \alpha^2\Delta x_i\Delta z_i \\
&= (1-\alpha)x_i^k z_i^k + \alpha^2\Delta x_i\Delta z_i \text{ for } i = 1, 2, \cdots, n \qquad (11) \\
(\boldsymbol{X}_k + \alpha\Delta\boldsymbol{X})(\boldsymbol{z}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{z}) &= (1-\alpha)\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{z}^k + \alpha^2\Delta\boldsymbol{X}\Delta\boldsymbol{z} \\
(\boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{z}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{z}) &= (1-\alpha)(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで最後の等式を得るために，$\Delta\boldsymbol{x}^T\Delta\boldsymbol{z} = 0$ を使っている．この最後の等式から

$$\mu(\alpha) = (\boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{z}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{z})/n$$

と定義すれば

$$\mu(\alpha) = (1-\alpha)\mu_k$$

が得られる．

実行可能内点 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)$ が条件 (9) を満たしていると仮定する．このとき，$\alpha \leq \frac{1}{nL'} \leq \frac{1}{2}$ ならば，補題 1.8 と $K = nL'^2$ と (11) より

$$\begin{aligned}
(x_i^k + \alpha\Delta x_i)(z_i^k + \alpha\Delta z_i) &\geq (1-\alpha)\left(1 - \tfrac{k}{K}\right)\mu_k - \tfrac{1}{(nL')^2}\tfrac{1}{4}n\mu_k \\
&\geq (1-\alpha)\left(1 - \tfrac{k+1}{K}\right)\mu_k \qquad (12) \\
&= \left(1 - \tfrac{k+1}{K}\right)\mu(\alpha)
\end{aligned}$$

が得られる．不等式 (12) がすべての $\alpha \in [0, \frac{1}{nL'}]$ に対して成り立つので，$x_i^k + \alpha \Delta x_i > 0$ かつ $z_i^k + \alpha \Delta z_i > 0$ である．したがって，$\alpha = \frac{1}{nL'}$ として次の点 $(\boldsymbol{x}^{k+1}, \boldsymbol{y}^{k+1}, \boldsymbol{z}^{k+1})$ を求めれば，その点も主双対問題 (3) の実行可能内点であり，$\mu_{k+1} = (\boldsymbol{x}^{k+1})^T \boldsymbol{z}^{k+1}/n$ に対して，条件 (9) が満たされる．

実行可能内点 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)$ が条件 (10) を満たしていると仮定する．このとき，$\alpha \leq \frac{1}{nL'} \leq \frac{1}{2}$ ならば，補題 1.8 と $K = nL'^2$ と (11) より

$$\begin{aligned}
&\|(\boldsymbol{X}_k + \alpha \Delta \boldsymbol{X})(\boldsymbol{z}^k + \alpha \Delta \boldsymbol{z}) - \mu(\alpha)\boldsymbol{e}\| \\
&= \|(1-\alpha)\boldsymbol{X}_k \boldsymbol{z}^k + \alpha^2 \Delta \boldsymbol{X} \Delta \boldsymbol{z} - (1-\alpha)\mu_k \boldsymbol{e}\| \\
&\leq \|(1-\alpha)(\boldsymbol{X}_k \boldsymbol{z}^k - \mu_k \boldsymbol{e})\| + \alpha^2 \|\Delta \boldsymbol{X} \Delta \boldsymbol{z}\| \\
&\leq (1-\alpha)\tfrac{k}{K}\mu_k + \tfrac{1}{(nL')^2}\tfrac{\sqrt{2}}{4} n \mu_k \\
&\leq \tfrac{k+1}{K}\mu(\alpha)
\end{aligned}$$

が得られる．上と同じ議論により，$\alpha = \frac{1}{nL'}$ として次の点 $(\boldsymbol{x}^{k+1}, \boldsymbol{y}^{k+1}, \boldsymbol{z}^{k+1})$ を求めれば，その点も主双対問題 (3) の実行可能内点であり，$\mu_{k+1} = (\boldsymbol{x}^{k+1})^T \boldsymbol{z}^{k+1}/n$ に対して，条件 (10) が満たされる． ▌

定理 1.6 を使うと，アルゴリズム 1.3 の反復回数が K 以下となることを示すことができる．

定理 1.9 アルゴリズム 1.3 の各反復において，ステップサイズを

$$\alpha = \frac{1}{nL'}$$

とすれば，すべての $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)$ が主双対問題の実行可能内点であり，$\mu_k = (\boldsymbol{x}^k)^T \boldsymbol{z}^k/n$ に対して，条件 (9) (あるいは条件 (10)) を満たす．その結果，$k \leq K$ において $(\boldsymbol{x}^k)^T \boldsymbol{z}^k \leq \epsilon$ が成立し，アルゴリズムが終了する．

証明 仮定 1.4 より，$k = 0$ のとき，点 $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{z}^0)$ で条件 (9) が満たされている．第 k 反復において，点 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)$ で条件 (9) が満たされているとすれば，ステップサイズを

$$\alpha = \frac{1}{nL'}$$

とすれば，定理 1.6 より，点 $(\boldsymbol{x}^{k+1}, \boldsymbol{y}^{k+1}, \boldsymbol{z}^{k+1})$ においても条件 (9) が満たされるので，帰納法によりすべての点で満たされる．このとき，

$$(\boldsymbol{x}^k)^T \boldsymbol{z}^k = \left(1 - \frac{1}{nL'}\right)^k (\boldsymbol{x}^0)^T \boldsymbol{z}^0$$

であるので，もし $k = K$ まで反復を繰り返したとすれば

$$\begin{array}{rcl} \log \frac{(\boldsymbol{x}^K)^T \boldsymbol{z}^K}{(\boldsymbol{x}^0)^T \boldsymbol{z}^0} & = & K \log(1 - \frac{1}{nL'}) \\ & \leq & -nL'^2 \frac{1}{nL'} \\ & \leq & -\log \frac{n\mu^0}{\epsilon} \end{array}$$

となるので，$(\boldsymbol{x}^K)^T \boldsymbol{z}^K \leq \epsilon$ が成立する．

点 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)$ で条件 (10) が満たされている場合も同様に証明できる． ▮

この定理では，ステップサイズを $\alpha = \frac{1}{nL'}$ に固定しているが，実際の計算では，各反復ごとに条件 (9) あるいは条件 (10) をみたす最大のステップサイズを用いることにより，計算効率を上げることができると考えられる．

上の定理より，アルゴリズム 1.3 の反復回数が $O(nL'^2)$ であることが判明した．線形計画問題のサイズを L とするとき，仮定 1.4 と 1.5 より，$L' = O(L)$ であるので，アルゴリズム 1.3 は，$O(nL^2)$ 反復のアルゴリズムである．この反復回数は，多くの内点法が達成している反復回数の上界 $O(nL)$ あるいは $O(\sqrt{n}L)$ に比べると，L の指数が 2 となっているので，あまりよい結果とはいえない．しかし，主アフィンスケーリング法が大域的な収束性のみで，反復回数の上界が得られていないことと比べると，良い結果であるともいえる．

この節では，ステップサイズを決めるときの条件として (9) あるいは (10) のいづれを使っても，反復回数の上界が同じ $O(nL^2)$ であることを示した．このことは，主双対パス追跡アルゴリズムにおいて，条件 (9) を使うと反復回数が $O(nL)$ であり，条件 (10) を使うと反復回数が $(\sqrt{n}L)$ であることと比べると，興味深い結果であるといえる．

参考文献

[1] Monteiro, R. D. C., Adler, I. and Resende, M. G. C.: “A polynomial-time primal-dual affine scaling algorithm for linear and convex quadratic programming and its power series extension,” *Mathematics of Operations Research* 15 (1990) 191–214.