学習・研究用テキスト 内点法 (1A)

# 解析的中心と中心パス

水野 眞治

東京工業大学 大学院社会理工学研究科 経営工学専攻

http://www.me.titech.ac.jp/~mizu_lab/text/

2010 年 11 月 9 日

**概要**

内点法，特にパス追跡法を理解するうえで重要な解析的中心と中心パスについて解説する．はじめに，内点を持つ有界な凸多面体の解析的中心を定義し，それをベースとして線形計画問題の解析的中心を説明する．解析的中心の集合が中心パスを形成することを示し，その中心パスの一端が最適解集合の解析的中心に収束することを示す．このことから，中心パスを追跡することにより，線形計画問題の最適解を求めることができる．また，中心パスを使って，強相補解の存在も示す．

## 目次

# 1 解析的中心

この節では，まずはじめに線形の等式・不等式で定義された有界で内点を持つ凸多面体の解析的中心を説明する．その結果を使い，線形計画問題の実行可能領域に目的関数値の制限を付けた多面体の解析的中心について解説する．

## 1.1 凸多面体の解析的中心

この節では，凸多面体の内点と解析的中心について解説する．内点をもつ有界な多面体に解析的中心が存在することを示し，解析的中心であるための必要十分条件を示す．

線形の等式と不等式を満たす点の集合

$$S' = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^k | \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$$

あるいは，それを $\boldsymbol{x}$ の空間に射影した

$$S = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n | \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$$

を**凸多面集合**あるいは単に**多面集合**という．凸多面集合は，有界な場合には，**凸多面体**あるいは単に**多面体**と呼ばれる．ここで，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ はそれぞれ $n$ 次と $k$ 次のベクトルであり，$\boldsymbol{b}$ は $m$ 次のベクトルである．多面集合には，$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{x}' \geq \boldsymbol{b}'$ といった形の不等式を含んでもよいが，その時にはスラック変数のベクトル $\boldsymbol{z}$ を導入して，$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{z} = \boldsymbol{b}', \boldsymbol{z} \geq 0$ とすることにより，上記の形に変形できる．以下では，$S'$ の形の多面集合よりも，非負変数のみの空間における多面集合 $S$ を主に扱うが，$S'$ の場合も同様に議論できる．特に，$m \times k$ 行列 $\boldsymbol{B}$ のランクが $k$ であるならば，任意の $\boldsymbol{x} \in S$ に対して，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ を満たす $\boldsymbol{y}$ が唯一つ定まる．もし，$\boldsymbol{B}$ のランクが $k$ より小さいと，そのような $\boldsymbol{y}$ は無数に存在する．

$\boldsymbol{x}$ が不等式 $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ をすべて等号ではない不等号 $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$ で満たすとき，$\boldsymbol{x}$ を $S$ の **(解析的な) 内点**という．さらに，$\boldsymbol{x} \in S$ である ($\boldsymbol{y}$ が存在し，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ を満たす) ときには，$S$ の**実行可能内点**といい，$\boldsymbol{x} \notin S$ であるときには，$S$ の**実行不能内点**という．文脈から明らかな時には，実行可能内点を単に内点と呼ぶ．解析的な実行可能内点は，ユークリッド空間 $\mathcal{R}^n$ における集合 $S$ の位相的な内点 (近傍が存在し，その近傍が $S$ に含まれる

ような点) とは定義が異なっており，$S$ の代数的な表現に依存している．集合 $S$ の実行可能内点の集合を

$$S^0 = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n | \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}\}$$

とする．

集合 $S$ が有界な凸多面体 (十分大きな球体に含まれる多面体) であり，実行可能内点が存在する ($S^0 \neq \emptyset$) とき，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in S^0$ の関数

$$q(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{n} x_i$$

を最大化，あるいは同じことであるが

$$p(\boldsymbol{x}) = -\log q(\boldsymbol{x}) = -\sum_{j=1}^{n} \log x_i$$

を最小化する点 $\boldsymbol{x}$ が存在すれば，それを $S$ の**解析的中心**という．幾何学的には，多面体 $S$ は，等式 $x_i = 0$ ($i = 1, 2, \cdots, n$) であらわされた超平面の一部で囲まれた集合である．各変数 $x_i$ の値は，点 $\boldsymbol{x}$ から超平面 $\{\boldsymbol{x}' | x_i' = 0\}$ への距離になっている．これらの超平面には，多面体 $S$ の境界となっているものとなっていないものがあるが，そういった区別をせずに，点 $\boldsymbol{x}$ からすべての超平面への距離の積を最大にする点が解析的中心である．したがって，解析的中心は，多面体の境界を構成している超平面だけでなく，すべての超平面から影響を受ける．$\boldsymbol{x} \in S^0$ が凸多面体 $S$ の境界に近いときは，ある変数 $x_i$ の値が小さくなるので，関数 $q(\boldsymbol{x})$ の値も小さくなる．したがって，$q(\boldsymbol{x})$ を最大化する解析的中心は，どの境界 (超平面) からも離れた点という意味で，$S$ の中心である．集合 $S$ の解析的中心が唯一つ存在することを，次の定理で示す．

**定理 1.1** $m \times n$ 行列 $A$ のランクが $m$ であると仮定する．集合 $S$ が有界な凸多面体であり，実行可能内点が存在する ($S^0 \neq \emptyset$) とき，$S$ の解析的中心が唯一つ存在する．

**証明** 仮定より，内点 $\boldsymbol{x}^0 \in S^0$ が存在する．関数 $p(\boldsymbol{x})$ の最小解が存在するならば，それは，関数 $p(\boldsymbol{x})$ の値が $p(\boldsymbol{x}^0)$ 以下であるような内点の集合

$$S^0(\boldsymbol{x}^0) = \{\boldsymbol{x} \in S^0 | p(\boldsymbol{x}) \leq p(\boldsymbol{x}^0)\}$$

上にあり，そこ以外に存在しない．$S$ が有界であり，関数 $p(\boldsymbol{x})$ が連続であり，$\boldsymbol{x}$ が境界に近づくと $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ の値が発散するので，$S^0(\boldsymbol{x}^0)$ は有界閉集合である．(より厳密に議論すると，$S^0(\boldsymbol{x}^0)$ 上の任意の点列を $\{\boldsymbol{x}^i\}$ とすれば，$S$ が有界であるので，集積点 $\boldsymbol{x}^* \in S$ が

存在する．$\boldsymbol{x}^* \notin S^0$ であるとすると，$p(\boldsymbol{x}^i) \to \infty$ となり，矛盾するので，$\boldsymbol{x}^* \in S^0$ である．したがって，$p(\boldsymbol{x}^*)$ が定義できるが，$p(\boldsymbol{x})$ が連続関数であるので，$p(\boldsymbol{x}^*) \leq p(\boldsymbol{x}^0)$ が成立し，$\boldsymbol{x}^* \in S^0(\boldsymbol{x}^0)$ である．）$-\log x_i$ は $x_i$ の狭義凸関数であるので，$p(\boldsymbol{x})$ も $\boldsymbol{x}$ の狭義凸関数である．有界閉集合 $S^0(\boldsymbol{x}^0)$ 上の連続関数 $p(\boldsymbol{x})$ は最小解を持ち，狭義凸関数であるから最小解は唯一つである． ▌

この定理により，解析的中心が唯一つ存在することが保証された．次に，$\boldsymbol{x}^* \in S^0$ が $S^0$ の解析的中心あるための，必要十分条件を求める．定義より，解析的中心は，非線形計画問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & p(\boldsymbol{x}) = -\sum_{j=1}^{n} \log x_i \\
\text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}
\end{array}
$$

の最適解である．ここで，$p(\boldsymbol{x})$ が定義されるためには，$\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$ でなければならない．この問題は，凸計画問題であるので，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が最適解であるための必要十分条件は，付録の定理 4.1 に述べられている KKT 条件より，

$$
\begin{array}{l}
-\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{e} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \\
\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \\
\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}
\end{array}
\tag{1}
$$

となる．ここで，$\boldsymbol{X} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x}$ の各要素を対角要素とする対角行列 (つまり，ベクトル $\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{e}$ の各要素が $1/x_i$) であり，$\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_m)^T$ は等式制約に対するラグランジュ乗数のベクトルである．

**例 1.2** 凸多面体の例を

$$
S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T | x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, 2x_1 + x_2 + x_4 = 3, (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \geq \boldsymbol{0}\}
$$

として，その解析的中心を求めてみよう．この例の場合，条件 (1) は，

$$
\begin{array}{l}
v_1 + 2v_2 = 1/x_1 \\
2v_1 + v_2 = 1/x_2 \\
v_1 = 1/x_3 \\
v_2 = 1/x_4 \\
x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\
2x_1 + x_2 + x_4 = 3
\end{array}
$$

となる．これを解くと，$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1/2, 1/2, 3/2, 3/2)$ と $(v_1, v_2) = (2/3, 2/3)$ が得られる．

## 1.2 線形計画問題の実行可能領域と仮定

$n$ 個の変数と $m$ 個の等式制約をもつ標準形の線形計画問題は

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{2}$$

と表される．これを主問題とすれば，その双対問題は

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{3}$$

となる．主問題と双対問題の実行可能領域をそれぞれ

$$F_P = \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$$
$$F_D = \{\boldsymbol{z} | \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c}, \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0}\}$$

とし，実行可能内点の集合をそれぞれ

$$F_P^0 = \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}\}$$
$$F_D^0 = \{\boldsymbol{z} | \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c}, \boldsymbol{z} > \boldsymbol{0}\}$$

とする．ここで，次の 3 つの仮定を置く．

**仮定 1.3** $m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ のランクが $m$ である．

**仮定 1.4** 線形計画問題 (2) の実行可能領域の内点 $x^0 \in F_P^0$ が存在する．

**仮定 1.5** 双対問題 (3) の実行可能領域の内点 $z^0 \in F_D^0$ が存在する．

上の仮定 1.4 と 1.5 が満たされるならば，弱双対定理により，主問題と双対問題には最適解が存在し，双対定理により，それらの最適値が等しい．

## 1.3 主問題 (標準形の線形計画問題) の解析的中心

標準形の線形計画問題 (2) の実行可能領域に関する凸多面体の解析的中心について調べる．線形計画問題 (2) の実行可能領域 $F_P$ は，有界であるかどうか不明であるが，目的関数値が一定値以下である実行可能解の集合は，次の補題で示すように，有界である．

**補題 1.6** 仮定 1.4 と 1.5 のもとで，任意の $\sigma_P$ に対して，目的関数値が $\sigma_P$ 以下である実行可能領域

$$F_P(\sigma_P) = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq \sigma_P,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$$

は有界である．

**証明** 主問題の実行可能内点 $\boldsymbol{x}^0$ と双対問題の実行可能内点 $(\boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{z}^0)$ が存在するとする．$F_P(\sigma_P)$ が空集合ならば，有界なので，空でないとする．任意の $\boldsymbol{x} \in F_P(\sigma_P)$ に対して，

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{z}^0)^T\boldsymbol{x} &= (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^0)^T\boldsymbol{x} \\
&= \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{y}^0)^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \\
&\leq \sigma_P - (\boldsymbol{y}^0)^T\boldsymbol{b}
\end{aligned}$$

左辺の各 $x_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ の係数 $z_i^0$ が正であり，$\boldsymbol{x} \geq 0$ なので

$$x_i \leq \frac{\sigma_P - (\boldsymbol{y}^0)^T\boldsymbol{b}}{z_i^0}\ (i = 1, 2, \cdots, n)$$

が成立する．したがって，$\boldsymbol{x} \in F_P(\sigma_P)$ の各要素の上界が存在するので，多面体 $F_P(\sigma_P)$ は有界である． ▮

**定理 1.7** 仮定 1.4 と 1.5 が満たされており，線形計画問題 (2) の最適解を $\boldsymbol{x}^*$ とし，最適値を $w^*$ とする．任意の $\sigma_P > w^*$ に対して，集合 $F_P(\sigma_P)$，あるいはスラック変数 $x_0$ を導入した

$$\bar{F}_P(\sigma_P) = \left\{(x_0, \boldsymbol{x}) \mid x_0 + \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = \sigma_P,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ x_0 \geq 0, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\right\}$$

は，内点を持つ有界な凸多面体であり，唯一つの解析的中心をもつ．

**証明** 線形計画問題 (2) の最適解を $\boldsymbol{x}^*$ とし，最適値を $w^*$ とする．また，$\boldsymbol{x}^0 \in F_P^0$ を $F_P$ の実行可能内点とする．このとき，任意の $\alpha \in (0, 1]$ に対して，点

$$\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}^0 + (1 - \alpha)\boldsymbol{x}^* > \boldsymbol{0}$$

は，$F_P$ の実行可能内点である．したがって，任意の $\sigma_P > w^*$ に対して，集合 $\bar{F}_P(\sigma_P)$ に内点が存在する．補題 1.6 より集合 $\bar{F}_P(\sigma_P)$ が有界な多面体なので，定理 1.1 より解析的内点が唯一つ存在する． ▮

前節の (1) より，$(x_0, \boldsymbol{x}) > \boldsymbol{0}$ が集合 $\bar{F}_P(\sigma_P)$ の解析的中心であるための必要十分条件は,

$$\begin{array}{l} -1/x_0 + u_0 = 0 \\ -\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{e} + u_0\boldsymbol{c} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \\ \ x_0 + \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = \sigma_P \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \end{array}$$

となる．ここで，$u_0 = 1/x_0$ を他の式に代入し，$\boldsymbol{y} = -x_0\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{z} = x_0\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{e}$ とすれば，上の条件は,

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{X}\boldsymbol{z} = x_0\boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = \sigma_P - x_0 \end{array} \tag{4}$$

と表すことができる．これらの条件を満たす $\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{z}$ が存在するとき，$x_0 > 0$，$\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$ は凸多面体 $\bar{F}_P(\sigma_P)$ の解析的中心 ($\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$ は凸多面体 $F_P(\sigma_P)$ の解析的中心) となり，その逆も成り立つ．このとき，$\boldsymbol{X}\boldsymbol{z} = x_0\boldsymbol{e}$ より，$\boldsymbol{z} > \boldsymbol{0}$ でなければならない.

$x_0$，$\boldsymbol{x}(x_0)$，$\boldsymbol{y}(x_0)$，$\boldsymbol{z}(x_0)$ が式 (4) を満たすとする．$\boldsymbol{x}(x_0)$ は，目的関数値が $\sigma_P = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(x^0) + x_0$ 以下という多面体 $F_P(\sigma_P)$ の解析的中心であるが，別の多面体，すなわち目的関数値が $\hat{\sigma}_P = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(x_0)$ と等しい多面体

$$\hat{F}_P(\hat{\sigma}_P) = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = \hat{\sigma}_P,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$$

の解析的中心でもある.

**演習問題 1.8** $\hat{\sigma}_P = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(x_0)$ とするとき，多面体 $\hat{F}_P(\hat{\sigma}_P)$ が有界で，内点をもつことを示し，$\boldsymbol{x}(x_0)$ がその解析的中心であることを示せ.

**例 1.9** 次の標準形の線形計画問題の例

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & -x_1 - x_2 \\ \text{制約条件} & x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ & 2x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ & (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{5}$$

を扱う．この問題の実行可能領域は，例 1.2 で扱った多面体と一致している．この問題の

解析的中心は，式 (4) より，

$$
\begin{aligned}
&x_1 + 2x_2 + x_3 = 3\\
&2x_1 + x_2 + x_4 = 3\\
&y_1 + 2y_2 + z_1 = -1\\
&2y_1 + y_2 + z_2 = -1\\
&y_1 + z_3 = 0\\
&y_2 + z_4 = 0\\
&x_1 z_1 = x_0\\
&x_2 z_2 = x_0\\
&x_3 z_3 = x_0\\
&x_4 z_4 = x_0\\
&-x_1 - x_2 = \sigma_P - x_0
\end{aligned}
$$

の解である．$x_0$ を定数とみて，この解を計算すると

$$
\begin{aligned}
&x_1 = x_2 = \tfrac{3-6x_0+\sqrt{9+36x_0^2}}{6}\\
&x_3 = x_4 = \tfrac{3+6x_0-\sqrt{9+36x_0^2}}{2}\\
&y_1 = y_2 = \tfrac{-3-6x_0-\sqrt{9+36x_0^2}}{18}\\
&z_1 = z_2 = \tfrac{-3+6x_0+\sqrt{9+36x_0^2}}{6}\\
&z_3 = z_4 = \tfrac{3+6x_0+\sqrt{9+36x_0^2}}{18}\\
&\sigma_P = \tfrac{-3+9x_0-\sqrt{9+36x_0^2}}{3}
\end{aligned}
$$

となる．$x_0 \to \infty$ とすると, $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1/2, 1/2, 3/2, 3/2)$ となり, 例 1.2 の多面体の解析的中心と一致している．また，$x_0 \to 0$ とすると，$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 0, 0)$ となり, 問題 (5) の最適解となっている．このとき, $(y_1, y_2) = (-1/3, -1/3)$, $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (0, 0, 1/3, 1/3)$ となり，これは (5) の双対問題の最適解となっている．

## 1.4 双対問題の解析的中心

標準形の線形計画問題 (2) の双対問題 (3) の解析的中心について説明する．

仮定より，双対問題に最適解 $(\boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{z}^*)$ が存在し，最適値は主問題の最適値 $w^*$ と等しい．主問題の場合と同様に，任意の $\sigma_D < w^*$ に対して，目的関数値が $\sigma_D$ 以上である実行可能解の集合

$$F_D(\sigma_D) = \{\boldsymbol{z} | \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \geq \sigma_D, \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c}, \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0}\}$$

あるいは，スラック変数 $z_0$ を導入した

$$\bar{F}_D(\sigma_D) = \{(z_0, \boldsymbol{z}) | \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} - z_0 = \sigma_D, \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c}, z_0 > 0, \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0}\}$$

は有界で，内点を持つ．点 $(z_0, \boldsymbol{z}) \geq \boldsymbol{0}$ が多面体 $\bar{F}_D(\sigma_D)$ の解析的中心であるための必要十分条件は，(1) より

$$\begin{array}{l} -1/z_0 - w_0 = 0 \\ -\boldsymbol{Z}^{-1}\boldsymbol{e} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{0} \\ w_0\boldsymbol{b} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} - z_0 = \sigma_D \\ \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c} \end{array}$$

となる．ここで，$\boldsymbol{Z} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{z})$ である．$w_0 = -1/z_0$ を他の式に代入し，$\boldsymbol{x} = z_0\boldsymbol{w}$ とすれば,

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{Z}\boldsymbol{x} = z_0\boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} = z_0 + \sigma_D \end{array} \tag{6}$$

が得られる．これらの条件を満たす $\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$ が存在するとき，$z_0 > 0$，$\boldsymbol{z} > \boldsymbol{0}$ は凸多面体 $\bar{F}_D(\sigma_D)$ の解析的中心 ($\boldsymbol{z} > \boldsymbol{0}$ は凸多面体 $F_D(\sigma_D)$ の解析的中心) となり，その逆も成り立つ．また，$\boldsymbol{X}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{x}$ であるので，式 (4) と比べると，もし $x_0 = z_0$ となるように $\sigma_P$ と $\sigma_D$ を設定すれば，主問題の解析的中心の条件と双対問題の解析的中心の条件が一致していることがわかる．すなわち，式 (4) を満たす $\boldsymbol{z}$ は，ある $\sigma_D$ に対して，$F_D(\sigma_D)$ の解析的中心となり，式 (6) を満たす $\boldsymbol{x}$ は，ある $\sigma_P$ に対して，$F_P(\sigma_P)$ の解析的中心となる．

## 1.5 主双対線形計画問題の解析的中心

標準形の線形計画問題 (2) とその双対問題 (3) を一緒にし，双対ギャップを目的関数とした問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0, \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{7}$$

の解析的中心について説明する．問題 (7) を**主双対線形計画問題**と呼ぶ．この問題の実行可能領域を

$$F_{PD} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) | \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0}\}$$

とする．

弱双対定理より，問題 (7) の目的関数値は常に 0 以上であり，双対定理より，最適値が 0 となる．したがって，目的関数値が 0 となる解 $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{z}^*)$ を求めれば，$\boldsymbol{x}^*$ は主問題の最適解であり，$(\boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{z}^*)$ は双対問題の最適解である．

仮定より，主問題と双対問題に実行可能内点が存在し，それぞれ目的関数値に上限，または下限を付ければ実行可能領域が有界となるので，任意の $\sigma_{PD} > 0$ に対して，目的関数値 (双対ギャップ) が $\sigma_{PD}$ 以下である実行可能解の集合

$$F_{PD}(\sigma_{PD}) = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) | \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \leq \sigma_{PD}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0}\}$$

あるいはスラック変数を導入した

$$\bar{F}_{PD}(\sigma_{PD}) = \{(x', \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) | \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} + x' = \sigma_{PD}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c}, (x', \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \geq \boldsymbol{0}\}$$

は有界で，内点を持つ．点 $(x', \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \geq \boldsymbol{0}$ が多面体 $\bar{F}_{PD}(\sigma_{PD})$ の解析的中心であるための必要十分条件は，(1) より

$$\begin{aligned}
&-1/x' + v' = 0\\
&-\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{e} + v'\boldsymbol{c} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}\\
&-\boldsymbol{Z}^{-1}\boldsymbol{e} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}\\
&-v'\boldsymbol{b} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}\\
&\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} + x' = \sigma_{PD}\\
&\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\\
&\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c}
\end{aligned}$$

となる．ここで，$\boldsymbol{x} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{Z} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{z})$ である．$v' = 1/x'$ を他の式に代入し，整理すれば

$$\begin{aligned}
&-\boldsymbol{A}^T(x'\boldsymbol{v}) + x'\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{c}\\
&\boldsymbol{Z}(x'\boldsymbol{w}) = x'\boldsymbol{e}\\
&\boldsymbol{A}(x'\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{b}\\
&\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} + x' = \sigma_{PD}\\
&\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\\
&\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c}
\end{aligned} \tag{8}$$

となる．したがって，

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\\
&\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c}\\
&\boldsymbol{Z}\boldsymbol{x} = x'\boldsymbol{e}\\
&\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} + x' = \sigma_{PD}
\end{aligned} \tag{9}$$

の解 $(x', \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) > 0$ と $\boldsymbol{y}$ を求め，$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{x}/x'$，$\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{y}/x'$ とすれば，式 (8) の解が得られる．

条件式 (9) と式 (4) あるいは式 (6) とくらべると，この式の解は，$x' = x_0$ ならば式 (4) の解と一致し，$x' = z_0$ ならば式 (6) の解と一致する．言い換えれば，$\mu > 0$ のとき

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\\
&\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c}\\
&\boldsymbol{Z}\boldsymbol{x} = \mu\boldsymbol{e}
\end{aligned} \tag{10}$$

と $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{z} > \boldsymbol{0}$ を満たす解 $\boldsymbol{x}(\mu)$，$\boldsymbol{y}(\mu)$，$\boldsymbol{z}(\mu)$ が存在するならば，$x_0 = \mu$ と $\boldsymbol{x}(\mu)$ は $\sigma_P = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(\mu) + \mu$ とした時の多面体 $\bar{F}_P(\sigma_P)$ の解析的中心であり，$z_0 = \mu$ と $\boldsymbol{z}(\mu)$ は $\sigma_D = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}(\mu) - \mu$ とした時の多面体 $\bar{F}_D(\sigma_D)$ の解析的中心であり，$x' = \mu$，$\boldsymbol{x}(\mu)$，$\boldsymbol{z}(\mu)$ は $\sigma_{PD} = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(\mu) - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}(\mu) + \mu = (n+1)\mu$ とした時の多面体 $\bar{F}_{PD}(\sigma_{PD})$ の解析的中心である．以上の結果から，次の定理が得られる．

**定理 1.10** $\mu > 0$ に対して，ある $\boldsymbol{y}(\mu)$ が存在し，$\boldsymbol{x}(\mu) > \boldsymbol{0}$ と $\boldsymbol{z}(\mu) > \boldsymbol{0}$ が

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(\mu) = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}(\mu) + \boldsymbol{z}(\mu) = \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{Z}(\mu)\boldsymbol{x}(\mu) = \mu\boldsymbol{e} \end{array}$$

を満たすとする．このとき，$\boldsymbol{x}(\mu)$ は，主問題の目的関数値が $\sigma_P = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(\mu) + \mu$ 以下である実行可能領域 $F_P(\sigma_P)$ の解析的中心であり，$\boldsymbol{z}(\mu)$ は，双対問題の目的関数値が $\sigma_D = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}(\mu) - \mu$ 以上である実行可能領域 $F_D(\sigma_D)$ の解析的中心であり，$(\boldsymbol{x}(\mu), \boldsymbol{z}(\mu))$ は，主双対線形計画問題の目的関数値 (双対ギャップ) が $(n+1)\mu$ 以下である実行可能領域 $F_{PD}((n+1)\mu)$ の解析的中心である．

1.3 節の最後の議論から，次の系も得られる．

**系 1.11** 定理 1.10 の $\boldsymbol{x}(\mu)$ は，主問題の目的関数値が $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(\mu)$ と等しい実行可能領域の解析的中心であり，$\boldsymbol{z}(\mu)$ は，双対問題の目的関数値が $\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}(\mu)$ と等しい実行可能領域の解析的中心であり，$(\boldsymbol{x}(\mu), \boldsymbol{z}(\mu))$ は，主双対線形計画問題の目的関数値 (双対ギャップ) が $n\mu$ と等しい実行可能領域の解析的中心である．

定理 1.10 の $\boldsymbol{x}(\mu)$ を**主問題の解析的中心**，$\boldsymbol{z}(\mu)$ あるいは $(\boldsymbol{y}(\mu), \boldsymbol{z}(\mu))$ を**双対問題の解析的中心**，解 $(\boldsymbol{x}(\mu), \boldsymbol{z}(\mu))$ あるいは $(\boldsymbol{x}(\mu), \boldsymbol{y}(\mu), \boldsymbol{z}(\mu))$ を**主双対線形計画問題の解析的中心**と呼ぶ．

**演習問題 1.12** 系 1.11 を証明せよ．

# 2 対数障壁関数と中心パス

この節では，線形計画問題に対数障壁関数を導入したときに，その問題の最適解が前節で定義した解析的中心となっていることを示す．さらに，解析的センターの集合がなめらかなパスとなることを説明する．はじめに主問題の場合について詳しく解説し，双対問題の場合と主双対線形計画問題の場合については，主問題の場合とほぼ同様なので，簡単に

説明する．

## 2.1 主問題の対数障壁関数と中心パス

標準形の線形計画問題 (2) を再掲すると，

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0} \end{array}$$

である．この問題の制約条件 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \geq \boldsymbol{0}$ に対する対数障壁関数 $-\sum_{i=1}^n \log x_i$ を導入し，パラメータ $\mu>0$ を使って目的関数に加えると

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}-\mu\sum_{i=1}^n \log x_i \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \end{array} \tag{11}$$

が得られる．この問題は，$\boldsymbol{x}>\boldsymbol{0}$ に対して定義されている．$\mu$ の値を 0 に近づけると，目的関数の対数障壁関数の部分の影響がほとんどなくなることから，$\mu\to 0$ とした時の (11) の解が線形計画問題 (2) の最適解に近づくと考えられる．このようにして，元問題の近似的な最適解を求める方法を**障壁関数法**という．このアプローチは，もともと非線形計画法において発展してきたが，内点法が開発されるに従い，線形計画問題にも適用されている．

問題 (11) の目的関数が凸関数なので，$\boldsymbol{x}$ がこの問題の最適解である必要十分条件は，

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{c}-\mu\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{e}+\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \end{array}$$

となる．ここで，$\boldsymbol{y}=-\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{z}=\mu\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{e}$ とすれば，

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{X}\boldsymbol{z}=\mu\boldsymbol{e} \end{array} \tag{12}$$

が得られる．この条件式が式 (10) と一致しているので，その解は，解析的中心 $(\boldsymbol{x}(\mu),\boldsymbol{y}(\mu),\boldsymbol{z}(\mu))$ である．解析的中心 $(\boldsymbol{x}(\mu),\boldsymbol{y}(\mu),\boldsymbol{z}(\mu))$ の集合を

$$P=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{c},\boldsymbol{X}\boldsymbol{z}=\mu\boldsymbol{e},\mu>0,\boldsymbol{x}>\boldsymbol{0},\boldsymbol{z}>\boldsymbol{0}\} \tag{13}$$

とする．この集合は，なめらかなパス (1 次元多様体) となることを次の定理で示す．

**定理 2.1** 式 (13) で定義された解析的中心 $(\boldsymbol{x}(\mu),\boldsymbol{y}(\mu),\boldsymbol{z}(\mu))$ の集合 $P$ はなめらかなパスとなる．

**証明** 関数

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\mu)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}-\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{X}\boldsymbol{z}-\mu\boldsymbol{e}\end{pmatrix}$$

を定義する．解析的中心 $(\boldsymbol{x}(\mu),\boldsymbol{y}(\mu),\boldsymbol{z}(\mu))$ は，方程式 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\mu)=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})$ の解である．この関数の $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{z}$ に関するヤコビ行列は,

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}^T & I\\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X}\end{pmatrix}$$

となる．ここで，$I$ は単位行列であり，$\boldsymbol{0}$ はそれぞれ適当なサイズのゼロ行列である．上の行列が正則でないとしたら，ゼロでないベクトル $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})$ が存在し,

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}^T & I\\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{q}\\ \boldsymbol{r}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$$

となる．簡単な計算により, $\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{r}=0$ となり, $\boldsymbol{p}=-\boldsymbol{Z}^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{r}$ を代入すると, $\boldsymbol{r}^T\boldsymbol{Z}^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{r}=0$ が得られる．この式より，$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$ であり，それを使うと $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0}$ が得られる．したがって，ヤコビ行列は任意の解 $(\boldsymbol{x}(\mu),\boldsymbol{y}(\mu),\boldsymbol{z}(\mu))$ において正則である．陰関数定理 4.1 より，$P$ はなめらかなパスとなる． ▌

このパス $P$ を線形計画問題の**中心パス**という．中心パス上の点は，後に示すように，$\mu\to 0$ としたときに最適解に収束する．したがって，中心パスの近傍に点列を生成し，$\mu\to 0$ とすることにより，最適解の近似解を得ることができる．これが，パス追跡法の基本的考え方である．

中心パス $P$ を $\boldsymbol{x}$ の空間に射影した集合

$$P_x=\{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{c},\boldsymbol{X}\boldsymbol{z}=\mu\boldsymbol{e},\mu>0,\boldsymbol{x}>\boldsymbol{0},\boldsymbol{z}>\boldsymbol{0}\}$$

は，主問題の実行可能領域に含まれるなめらかなパスになり，同様に $(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ の空間に射影した集合

$$P_{yz}=\{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{c},\boldsymbol{X}\boldsymbol{z}=\mu\boldsymbol{e},\mu>0,\boldsymbol{x}>\boldsymbol{0},\boldsymbol{z}>\boldsymbol{0}\}$$

は，双対問題の実行可能領域に含まれるなめらかなパスになる．$P_x$ を近似する点列を生成する方法が，主問題のパス追跡法であり，同様に $P_{yz}$ あるいは $P$ を近似する点列を生成する方法がそれぞれ双対問題あるいは主双対線形計画問題のパス追跡法となる．

## 2.2 双対問題の対数障壁関数と中心パス

標準形の線形計画問題の双対問題 (3) を再掲すると,

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{z}\geq\boldsymbol{0} \end{array}$$

である．この問題を最小化問題にし, 制約条件 $\boldsymbol{z}\geq\boldsymbol{0}$ に対する対数障壁関数 $-\sum_{i=1}^n \log z_i$ を導入し，パラメータ $\mu>0$ を使って目的関数に加えると

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & -\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}-\mu\sum_{i=1}^n \log z_i \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{c} \end{array} \tag{14}$$

が得られる．この問題は，$\boldsymbol{z}>\boldsymbol{0}$ に対して定義されている．

問題 (14) の目的関数が凸関数なので，$(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ がこの問題の最適解である必要十分条件は,

$$\begin{array}{l} -\boldsymbol{b}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0} \\ -\mu\boldsymbol{Z}^{-1}\boldsymbol{e}+\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{c} \end{array}$$

となる．ここで，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{u}$ とすれば,

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{X}\boldsymbol{z}=\mu\boldsymbol{e} \end{array}$$

が得られる．この条件式が式 (10) と一致していることから，その解は，解析的中心 $(\boldsymbol{x}(\mu),\boldsymbol{y}(\mu),\boldsymbol{z}(\mu))$ である．

## 2.3 主双対線形計画問題の対数障壁関数と中心パス

標準形の線形計画問題と双対問題を一緒にした主双対線形計画問題 (7) を再掲すると,

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{x}\geq 0,\boldsymbol{z}\geq\boldsymbol{0} \end{array}$$

である．この問題に制約条件 $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ と $\boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0}$ に対する対数障壁関数 $-\sum_{i=1}^{n}(\log x_i + \log z_i)$ を導入し，パラメータ $\mu > 0$ を使って目的関数に加えると

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} - \mu\sum_{i=1}^{n}(\log x_i + \log z_i) \\
\text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
 & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c}
\end{array}
\tag{15}
$$

が得られる．この問題は，$\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$ と $\boldsymbol{z} > \boldsymbol{0}$ に対して定義されている．

問題 (15) の目的関数が凸関数なので，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ がこの問題の最適解である必要十分条件は

$$
\begin{array}{l}
\boldsymbol{c} - \mu\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{e} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \\
-\boldsymbol{b} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \\
-\mu\boldsymbol{Z}^{-1}\boldsymbol{e} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \\
\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c}
\end{array}
\tag{16}
$$

となる．したがって，

$$
\begin{array}{l}
\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c} \\
\boldsymbol{X}\boldsymbol{z} = \mu\boldsymbol{e}
\end{array}
$$

の解 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ を求め，$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{y}$ とすれば，(16) の解が得られる．上の条件式は式 (10) と一致しているので，その解は，解析的中心 $(\boldsymbol{x}(\mu), \boldsymbol{y}(\mu), \boldsymbol{z}(\mu))$ である．

# 3 中心パスと最適解集合

ここでは，線形計画問題の中心パスの一端が最適解集合の解析的中心に収束することを示す．はじめに，最適解集合の解析的中心について説明し，その後に中心パスの収束を示す．また，最適解集合を理解する上で大切な強相補解の存在が，中心パスを使って簡単に証明できることも示す．

この節では，系 3.7 を除いて，仮定 1.3，1.4，1.5 が成り立っているものとする．

## 3.1 最適解集合の解析的中心

線形計画問題の最適解の集合も凸多面体である．この多面体の解析的中心について調べる．線形計画問題には，強相補性条件を満たす解が存在するので，主問題のある最適解 $\boldsymbol{x}^*$ と双対問題のある最適解 $(\boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{z}^*)$ が強相補性条件を満たす．この強相補解に対して

$$
\begin{array}{l}
I_P = \{i | x_i^* > 0\} \\
I_D = \{i | z_i^* > 0\}
\end{array}
$$

とすれば，$I_P \cap I_D = \emptyset$ かつ $I_P \cup I_D = \{1, 2, \cdots, n\}$ となる．また，主問題の任意の実行可能解 $\boldsymbol{x}$ が $x_i = 0\ (i \in I_D)$ ならば $\boldsymbol{z}^*$ と相補性条件を満たすので最適解であり，そうでなければ $\boldsymbol{z}^*$ と相補性条件をみたさないので最適解ではない．したがって，次の補題が得られる．

**補題 3.1** 線形計画問題の強相補解に対して，集合 $I_P$ と $I_D$ を上記のように定義すれば，主問題 (2) の最適解の集合は

$$U_P = \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, x_i \geq 0\ (i \in I_P), x_i = 0\ (i \in I_D)\}$$

となる．同様に，双対問題 (3) の最適解の集合は

$$U_D = \{\boldsymbol{z} | \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c}, z_i \geq 0\ (i \in I_D), z_i = 0\ (i \in I_P)\}$$

となる．このようにして定義した $U_P$ の解析的内点と $U_D$ の解析的内点は，強相補解であり，その逆も成り立つ．

主問題の最適解の集合 $U_P$ 上で，関数 $-\sum_{i \in I_P} \log x_i$ を最小化する点が $U_P$ の解析的中心であり，同様に，双対問題の最適解の集合 $U_D$ 上で，関数 $-\sum_{i \in I_D} \log z_i$ を最小化する点が $U_P$ の解析的中心である．

**演習問題 3.2** 補題 3.1 を証明せよ．

## 3.2 中心パスの最適解への収束

この節では，中心パスの性質を調べ，$\mu \to 0$ のときに，主問題の中心パス上の点 $\boldsymbol{x}(\mu)$ が主問題の最適解集合 $U_P$ の解析的中心に収束し，双対問題の中心パス上の点 $\boldsymbol{z}(\mu)$ が双対問題の最適解の集合 $U_D$ の解析的中心に収束することを示す．

任意の $\mu > 0$ に対して，標準形の線形計画問題とその双対問題の解析的中心の組 $(\boldsymbol{x}(\mu), \boldsymbol{y}(\mu), \boldsymbol{z}(\mu))$ は，

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(\mu) = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}(\mu) + \boldsymbol{z}(\mu) = \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{X}(\mu)\boldsymbol{z}(\mu) = \mu\boldsymbol{e} \end{array} \tag{17}$$

を満たす．この解析的中心の集合が中心パスである． 次の補題では，$\mu$ に上界を付ければ，その部分の中心パスが有界であることを示す．

**補題 3.3** 任意の正の実数列 $\{\mu_j\}$ について，上界 $\mu_0$ が存在するならば，点列 $\{(\boldsymbol{x}(\mu_j), \boldsymbol{z}(\mu_j))\}$ は有界である．(行列 $A$ のランクが $m$ であり，各 $\boldsymbol{z}(\mu_j)$ に対して，$\boldsymbol{y}(\mu_j)$ が唯一つに決まるので，$\{\boldsymbol{y}(\mu_j)\}$ も有界である．)

**証明** 式 (17) より，

$$(\boldsymbol{x}(\mu_0) - \boldsymbol{x}(\mu_j))^T(\boldsymbol{z}(\mu_0) - \boldsymbol{z}(\mu_j)) = -(\boldsymbol{x}(\mu_0) - \boldsymbol{x}(\mu_j))^T \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{y}(\mu_0) - \boldsymbol{y}(\mu_j)) = 0$$

となる．左辺を展開すると

$$\boldsymbol{x}(\mu_0)^T\boldsymbol{z}(\mu_j) + \boldsymbol{x}(\mu_j)^T\boldsymbol{z}(\mu_0) = \boldsymbol{x}(\mu_0)^T\boldsymbol{z}(\mu_0) + \boldsymbol{x}(\mu_j)^T\boldsymbol{z}(\mu_j) = n(\mu_0 + \mu_j) \leq 2n\mu_0$$

が得られる．左辺を要素に展開し，$x_i(\mu_0)z_i(\mu_0) = \mu_0$ $(i = 1, 2, \cdots)$ を使い，両辺を $\mu_0$ で割ると

$$\sum_{i=1}^{n} \left( \frac{z_i(\mu_j)}{z_i(\mu_0)} + \frac{x_i(\mu_j)}{x_i(\mu_0)} \right) \leq 2n$$

が得られる．これより，左辺の各分子に上界が存在するので，点列 $\{(\boldsymbol{x}(\mu_j), \boldsymbol{z}(\mu_j))\}$ は有界である． ▌

**補足説明 3.4** 1.5 節で定義した $F_{PD}(\sigma_{PD})$ が有界であることからも，上の補題の結果が得られる．

**定理 3.5** 0 に収束する任意の正の実数列 $\{\mu_j\}$ に対して，点列 $\{(\boldsymbol{x}(\mu_j)\}$ は主問題の最適解集合 $U_P$ の解析的中心 $\boldsymbol{x}^*$ に収束し，点列 $\{\boldsymbol{z}(\mu_j))\}$ は双対問題の最適解集合 $U_D$ の解析的中心 $\boldsymbol{z}^*$ に収束する．

**証明** 補題 3.3 の証明と同様にして

$$\boldsymbol{x}(\mu_j)^T\boldsymbol{z}^* + (\boldsymbol{x}^*)^T\boldsymbol{z}(\mu_j) = (\boldsymbol{x}^*)^T\boldsymbol{z}^* + \boldsymbol{x}(\mu_j)^T\boldsymbol{z}(\mu_j) = n\mu_j$$

が成立する．左辺を展開し，$x(\mu_j)z(\mu_j) = \mu_j$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ を使うと

$$\sum_{i=1}^{n} \left( \frac{z_i^*}{z_i(\mu_j)} + \frac{x_i^*}{x_i(\mu_j)} \right) = n$$

が得られる．$z_i^* = 0$ $(i \in I_P)$ かつ $x_i^* = 0$ $(i \in I_D)$ であるので，上の等式は

$$\sum_{i \in I_D} \frac{z_i^*}{z_i(\mu_j)} + \sum_{i \in I_P} \frac{x_i^*}{x_i(\mu_j)} = n \tag{18}$$

となる．左辺の各項が $n$ 以下なので，

$$
\begin{aligned}
z_i(\mu_j) \geq z_i^*/n > 0,\ i \in I_D \\
x_i(\mu_j) \geq x_i^*/n > 0,\ i \in I_P
\end{aligned}
$$

となる．$x_i(\mu_j)z_i(\mu_j) = \mu_j \to 0$ であるから，上の不等式より

$$
\begin{aligned}
x_i(\mu_j) \to 0,\ i \in I_D \\
z_i(\mu_j) \to 0,\ i \in I_P
\end{aligned}
$$

が得られる．これは，点列 $\{\boldsymbol{x}(\mu_j)\}$ の任意の集積点 $\boldsymbol{x}'$ が主問題の最適解集合 $U_P$ 上にあり，点列 $\{\boldsymbol{z}(\mu_j)\}$ の任意の集積点 $\boldsymbol{z}'$ が双対問題の最適解集合 $U_D$ 上にあることを意味する．補題 3.3 より，それらの点列が有界であるので，実際にそのような集積点 $\boldsymbol{x}' \in U_P$ と $\boldsymbol{z}' \in U_D$ が存在する．ここで，不等式 (18) の左辺に相加相乗平均の不等式を使うと，$|I_P| + |I_D| = n$ より

$$
\prod_{i \in I_D} \frac{z_i^*}{z_i(\mu_j)} \prod_{i \in I_P} \frac{x_i^*}{x_i(\mu_j)} \leq 1
$$

あるいは

$$
\prod_{i \in I_D} z_i^* \prod_{i \in I_P} x_i^* \leq \prod_{i \in I_D} z_i(\mu_j) \prod_{i \in I_P} x_i(\mu_j) \tag{19}
$$

が成り立つ．これが，任意の $\mu_j$ に対して成り立つので，集積点 $\boldsymbol{x}'$ と $\boldsymbol{z}'$ でも成り立ち

$$
\prod_{i \in I_D} z_i^* \prod_{i \in I_P} x_i^* \leq \prod_{i \in I_D} z_i' \prod_{i \in I_P} x_i' \tag{20}
$$

が得られる．一方，$\boldsymbol{x}^*$ が最適解集合 $U_P$ の解析的中心であるから，$\boldsymbol{x}' \in U_P$ に対して

$$
\prod_{i \in I_P} x_i^* \geq \prod_{i \in I_P} x_i'
$$

が成り立ち，$\boldsymbol{z}^*$ が最適解集合 $U_D$ の解析的中心であるから，$\boldsymbol{z}' \in U_P$ に対して

$$
\prod_{i \in I_D} z_i^* \geq \prod_{i \in I_D} z_i'
$$

が成り立つ．ここで，不等式 (20) が成り立っているので，上の二つの不等式は等号で成立しなけらばならない．したがって，$\boldsymbol{x}'$ は $U_P$ の解析的中心であり，$\boldsymbol{z}'$ も $U_D$ の解析的中心である．多面体の解析的中心はただ一つであるので，$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}^*$ かつ $\boldsymbol{z}' = \boldsymbol{z}^*$ である．このことから，点列 $\{\boldsymbol{x}(\mu_j)\}$ の任意の集積点が $\boldsymbol{x}^*$ であるので，その点列全体が 1 点 $\boldsymbol{x}^*$ に収束する．同様に，点列 $\{\boldsymbol{z}(\mu_j)\}$ が 1 点 $\boldsymbol{z}^*$ に収束する． ▌

### 3.3 強相補解の存在について

ここまで，理解を容易にするため，線形計画問題に強相補解が存在することを使って説明してきたが，実は，定理 3.5 の証明と同じような議論で，強相補解が存在することを証明できる．

**定理 3.6** 線形計画問題の主問題と双対問題に内点が存在するならば，強相補解が存在する．

**証明** 0 に収束する任意の正の実数列 $\{\mu_j\}$ に対して，補題 3.3 より，点列 $\{(\boldsymbol{x}(\mu_j), \boldsymbol{z}(\mu_j))\}$ が有界であるので，部分列が存在し，ある点 $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{z}')$ に収束する．明らかに，$\boldsymbol{x}'$ は主問題の実行可能解であり，ある $\boldsymbol{y}'$ に対して $(\boldsymbol{y}', \boldsymbol{z}')$ は双対問題の実行可能解である．このとき，定理 3.5 のはじめの部分と同じ議論により

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{z_i'}{z_i(\mu_j)} + \frac{x_i'}{x_i(\mu_j)}\right) = n + \frac{\boldsymbol{x}'^T\boldsymbol{z}'}{\mu_j}$$

が得られる．ここで，

$$I_P' = \{i | x_i' > 0\}$$
$$I_D' = \{i | z_i' > 0\}$$

とすれば，

$$\sum_{i\in I_D'} \frac{z_i'}{z_i(\mu_j)} + \sum_{i\in I_P'} \frac{x_i'}{x_i(\mu_j)} = n + \frac{\boldsymbol{x}'^T\boldsymbol{z}'}{\mu_j}$$

となる．ここで，部分列において $z_i(\mu_j) \to z_i'$，$x_i(\mu_j) \to x_i'$，$\mu_j \to 0$ であるから，左辺は $|I_P'| + |I_D'|$ に収束し，有界であるので，右辺にある分子 $\boldsymbol{x}'^T\boldsymbol{z}'$ が 0 でなければならない．したがって，$\boldsymbol{x}'$ と $\boldsymbol{z}'$ は相補解であり，上の等式より

$$|I_P'| + |I_D'| = n$$

が得られる．これより，$\boldsymbol{x}'$ と $\boldsymbol{z}'$ は強相補解である． ▮

上の定理では，内点が存在することを仮定したが，最適解をもつという条件に変更できる．なぜなら，最適解をもつとき，内点をもつ等価な人工問題を作ることができ，その人工問題に強相補解が存在することから，もとの問題にも強相補解が存在することを示すことができるからである．

**系 3.7** 線形計画問題の主問題 (と双対問題) に最適解が存在するならば，強相補解が存在する．

## 3.4 点列の強相補解への収束

前節では，中心パス上の点列が最適解に近づくならば，強相補解に収束することを示した．ここでは，中心パスの近傍を定義し，その近傍上の点列が最適解集合に近づくとき，任意の集積点が強相補解となることを示す．中心パス

$$P = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) | \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c}, \boldsymbol{X}\boldsymbol{z} = \mu\boldsymbol{e}, \mu > 0, \boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}, \boldsymbol{z} > \boldsymbol{0}\}$$

の近傍を $\beta \in (0,1)$ に対して

$$N(\beta) = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) | \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c}, \boldsymbol{X}\boldsymbol{z} \geq (1-\beta)\mu\boldsymbol{e}, \mu = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{z}/n, \boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}, \boldsymbol{z} > \boldsymbol{0}\}$$

と定義する．この集合 $N(\beta)$ は，$\beta \to 1$ のとき，主双対線形計画問題 (7) の実効可能内点の集合と一致する，言い換えれば，主双対線形計画問題の任意の内点 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ に対して，ある $\beta \in (0,1)$ が存在し，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in N(\beta)$ となる．したがって，主双対問題を解くほとんどの内点法は，この集合上に点列を生成する．そのようなアルゴリズムで生成された点列の集積点が，強相補解となることを示す．

**定理 3.8** $\beta \in (0,1)$ とする．近傍 $N(\beta)$ 上の任意の点列を $\{(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)\}$ とするとき，$(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k \to 0$ ならば，その任意の集積点 $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}', \boldsymbol{z}')$ は主問題 (2) と双対問題 (3) の強相補解である．

**証明** $(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k \to 0$ となる近傍 $N(\beta)$ 上の任意の点列を $\{(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)\}$ とし，その任意の集積点を $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}', \boldsymbol{z}')$ とする．仮定より，$\boldsymbol{x}'^T\boldsymbol{z}' = 0$ であり，$\boldsymbol{x}'$ は主問題の最適解，$(\boldsymbol{y}', \boldsymbol{z}')$ は双対問題の最適解となる．また，点列 $\{(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)\}$ の部分列が存在し，点 $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}', \boldsymbol{z}')$ に収束する．ここで，$\mu_k = (\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k/n$ とし，$\boldsymbol{v}^k = \frac{1}{\mu_k}\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{z}^k$ とすれば，$\boldsymbol{v}^k$ は有界閉集合 $S = \{\boldsymbol{v} | \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{v} = n, \boldsymbol{v} \geq \boldsymbol{0}\}$ 上の点である．したがって，上記の部分列の部分列が存在し，部分列 $\{\boldsymbol{v}^k\}$ がある集積点 $\boldsymbol{v}' \in S$ に収束する．議論を簡単にするため，収束する部分列の部分列を新しい点列とみることにより，点列 $\{(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)\}$ 全体が点 $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}', \boldsymbol{z}')$ に収束し，その時の点列 $\{\boldsymbol{v}^k\}$ が点 $\boldsymbol{v}'$ に収束する仮定しても一般性を失わない．

各 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)$ が $N(\beta)$ 上の点であるから

$$v_i^k = \frac{x_i^k z_i^k}{\mu_k} \geq (1-\beta) \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{21}$$

となる．定理 3.5 と同じ議論により

$$\boldsymbol{z}'^T\boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{x}'^T\boldsymbol{z}^k = (\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k + \boldsymbol{x}'^T\boldsymbol{z}' = n\mu_k$$

が成立する．ここで，

$$I'_P = \{i | x'_i > 0\}$$
$$I'_D = \{i | z'_i > 0\}$$

とすれば，

$$\sum_{i\in I'_D} z'_i x^k_i + \sum_{i\in I'_P} x'_i z^k_i = n\mu_k$$

あるいは

$$\sum_{i\in I'_D} \frac{z'_i}{z^k_i} v^k_i + \sum_{i\in I'_P} \frac{x'_i}{x^k_i} v^k_i = n$$

となる．ここで，$k \to \infty$ のとき $z^k_i \to z'_i$，$x^k_i \to x'_i$，$v^k_i \to v'_i$ であるので

$$\sum_{i\in I'_D} v'_i + \sum_{i\in I'_P} v'_i = n$$

となる．ここで，$I'_D \cap I'_P = \emptyset$ かつ $\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{v}' = n$ であるから，上の等式と条件 (21) より $I'_D \cup I'_P = \{1, 2, \cdots, n\}$ でなければならない．したがって，$(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}', \boldsymbol{z}')$ は，強相補解である．■

# 4 付録 (本文中で引用されている結果)

ここでは，本文中で引用されている，非線形計画問題の最適条件と陰関数定理について説明する．

## 4.1 非線形計画問題の最適条件

非線形計画問題の最適条件に関する結果を示す．$m_1$ 個の等式制約および $m_2$ 個の不等式制約を持った非線形計画問題を

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{制約条件} & h_j(\boldsymbol{x}) = 0,\ j = 1, 2, \cdots, m_1 \\ & g_j(\boldsymbol{x}) \le 0,\ j = 1, 2, \cdots, m_2 \end{array} \tag{22}$$

とする．ここで，すべての関数 $f$，$h_j$ $(j=1,2,\cdots,m_1)$，$g_j$ $(j=1,2,\cdots,m_2)$ が 2 階連続微分可能であるとする．ラグランジュ乗数のベクトル $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_{m_1})^T$ と $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,\cdots,v_{m_2})^T$ を使い，ラグランジュ関数を

$$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=f(\boldsymbol{x})+\sum_{j=1}^{m_1}u_jh_j(\boldsymbol{x})+\sum_{j=1}^{m_2}v_jg_j(\boldsymbol{x}).$$

と定義する．

**定理 4.1** $\boldsymbol{x}^*$ が非線形計画問題 (22) の最適解であり，等号が成り立っている有効制約の勾配ベクトル $\nabla h_j$ $(j=1,2,\cdots,m_1)$，$\nabla g_j$ $(j\in\{j|g_j(\boldsymbol{x}^*)=0\})$ が一次独立ならば，ある $\boldsymbol{u}^*=(u_1^*,u_2^*,\cdots,u_{m_1}^*)^T$ と $\boldsymbol{v}^*=(v_1^*,v_2^*,\cdots.v_{m_2}^*)^T$ が存在し

$$\begin{array}{l}\nabla_xL(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{v}^*)=\nabla f(\boldsymbol{x}^*)+\sum_{j=1}^{m_1}u_j^*\nabla h_j(\boldsymbol{x}^*)+\sum_{j=1}^{m_2}v_j^*\nabla g_j(\boldsymbol{x}^*)=\boldsymbol{0}\\ h_j(\boldsymbol{x}^*)=0,\ j=1,2,\cdots,m_1\\ g_j(\boldsymbol{x}^*)\le 0,\ u_j^*\ge 0,\ u_j^*g_j(\boldsymbol{x}^*)=0,\ j=1,\cdots,m_2\end{array}$$

が成立する．問題 (22) が凸計画問題の場合 (関数 $f$，$g_j$ $(j=1,2,\cdots,m_2)$ が凸関数で，$h_j$ $(j=1,2,\cdots,m_1)$ が線形関数の場合) には，逆に，上記の条件が成り立てば，$\boldsymbol{x}^*$ は非線形計画問題 (22) の最適解である．

上の定理の条件は，**カルーシュ・キューン・タッカー条件** (Karush-Kuhn-Tucker condition，KKT 条件) または**キューン・タッカー条件** (KT 条件) と呼ばれる．

## 4.2 陰関数定理

陰関数定理の結果を定理 2.1 の証明で使った形で示す．$m$ 次の変数ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $k$ 次のパラメータのベクトル $\boldsymbol{y}$ をもった，$m$ 個の方程式系

$$h_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0\ (i=1,2,\cdots,m) \tag{23}$$

があるとする．パラメータベクトルを $\boldsymbol{y}$ に固定したときの方程式系の解を $\boldsymbol{x}$ とするとき，ある関数 $\phi_i$ $(i=1,2,\cdots,m)$ が存在して，

$$x_i=\phi_i(\boldsymbol{y})$$

とあらわせるとき，この関数 $\phi_i$ $(i=1,2,\cdots,m)$ を陰関数という．

**定理 4.2** 各 $h_i$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ が $p$ 階連続微分可能であるとする．方程式系 (23) の解 $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)$ において，$m \times m$ のヤコビ行列

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_1(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_m(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)}{\partial x_1} & \frac{\partial h_m(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_m(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0)}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

が正則であるとする．このとき，$\boldsymbol{y}^0$ の近傍 $N$ と $p$ 階連続微分可能な関数 $\phi_i$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ が存在し，$x_i^0 = \phi_i(\boldsymbol{y}^0)$ であり，近傍に含まれる $\boldsymbol{y} \in N$ に対して，

$$h_i(\phi_1(\boldsymbol{y}), \phi_2(\boldsymbol{y}), \cdots, \phi_m(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y}) = 0,\ i = 1, 2, \cdots, m$$

となる．

**例 4.3** 関数 $h(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ に対して，方程式 $h(x, y) = 0$ の解を考える．$(x, y) = (0, 1)$ において，

$$\frac{\partial h(x, y)}{\partial x} = 2x = 0$$

となるので，この点の近傍では，$x = \phi(y)$ が解となるような関数 $\phi$ が存在しない．$x \in (0, 1]$ である解 $(x, y)$ の近傍では，そのような関数 $\phi(y) = \sqrt{1 - y^2}$ が存在する．

# 参考文献

[1] 宮川雅巳，水野眞治，矢島安敏：経営工学の数理 I，II，朝倉書店，2004