学習・研究用テキスト 内点法 (1B)

# 線形計画問題の大きさ $L$ と内点法の反復回数

水野 眞治

東京工業大学 大学院社会理工学研究科 経営工学専攻

http://www.me.titech.ac.jp/~mizu_lab/text/

2010 年 11 月 9 日

**概要**

線形計画問題を内点法のアルゴリズムにより解くときに，反復回数を評価するために必要となる，問題の大きさ $L$，最適解を得るための内点の条件，初期内点を持つ同値な人工問題を作るときのパラメータの大きさなどを解説する．

## 目次



## 1 線形計画問題の大きさ $L$ と内点法の反復回数

ここでは，線形計画問題を内点法のアルゴリズムで解くときに必要な計算量を評価する．そのためには，アルリズムの反復回数と 1 反復あたりの計算量を評価する必要がある．内点法の場合には，1 反復あたりの計算量がアルゴリズムによらずほぼ同じなので，ここではおもに反復回数に焦点をあてる．

アルゴリズムの反復回数が線形計画問題の大きさ $L$ に依存するので，その大きさの定義と意味をはじめに説明する．次に，線形計画問題の最適解を求めるために，どのような内点が必要であるか説明する．また，アルゴリズムを適用できるように，初期の実行可能内点を持つ人工問題を作成し，そのとき元の問題との同値性を保つために必要なパラメータの大きさを議論する．以上の説明の後，目的関数値の減少率とアルゴリズムの反復回数について解説する．

## 1.1 線形計画問題の大きさ

$n$ 個の変数と $m$ 個の等式制約をもつ標準形の線形計画問題は

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{1}$$

と表される．これを主問題とするとき，その双対問題は

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{2}$$

となる．行列 $\boldsymbol{A}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ について，次の仮定を置く．

**仮定 1.1** 行列 $\boldsymbol{A}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ のすべての成分は整数である．

このとき，線形計画問題 (1) の大きさを

$$L = \lfloor \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \log_2(|a_{ij}|+1) + \sum_{i=1}^{m} \log_2(|b_i|+1) + \sum_{j=1}^{n} \log_2(|c_j|+1) + \log_2(mn) \rfloor + 1$$

と定義する．ここで, $\lfloor a \rfloor$ は, $a$ を超えない最大の整数を表す．整数 $a$ に対して, $\log(|a|+1)$ は，$a$ を 2 進数で表現するのに必要なビット数のようなものであるから，上記の $L$ は，線形計画問題のすべてのデータを計算機に表現するのに最低限必要なビット数といえる．

行列 $\boldsymbol{A}$ あるいは行列 $\boldsymbol{A}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ を合わせた大きさを

$$L(\boldsymbol{A}) = \lfloor \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \log_2(|a_{ij}|+1) \rfloor + 1$$

$$L(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) = \lfloor \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \log_2(|a_{ij}|+1) + \sum_{i=1}^{m} \log_2(|b_i|+1) \rfloor + 1$$

とする．行列 $\boldsymbol{A}$ の基底行列あるいは正則な $m \times m$ 部分行列を $\boldsymbol{A}_B$ とするとき，方程式系

$$\boldsymbol{A}_B\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{b}$$

の解 $\boldsymbol{x}_B^*$ の第 $i$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ 要素 $x_i^*$ は，Cramer の公式より

$$x_i^* = \frac{\text{行列 } \boldsymbol{A}_B \text{ の第 } i \text{ 列を } \boldsymbol{b} \text{ に置き換えた行列の行列式}}{\det \boldsymbol{A}_B}$$

と表すことができる．ここで，$\det \boldsymbol{C}$ は，行列 $\boldsymbol{C}$ の行列式を表す．Hadamard の不等式により，行列 $\boldsymbol{C}$ の行列式の絶対値は，その行列の各列ベクトルのノルムの積以下であるので，

$$|\det \boldsymbol{A}_B| \leq \prod_{i=1}^{m} \|\boldsymbol{a}_i\|$$

が成り立つ．ここで，ベクトル $\boldsymbol{a}_i$ は，行列 $\boldsymbol{A}_B$ の第 $i$ 列を表している．ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_m)^T$ に対して

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} a_j^2} \leq \sum_{j=1}^{m} |a_j| \leq \prod_{j=1}^{m}(|a_j| + 1)$$

となるので

$$|\det \boldsymbol{A}_B| \leq \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{m}(|a_{ij}| + 1) \leq 2^{L(\boldsymbol{A})}$$

が成立する．同様に $x_i^*$ の分子についても，$2^{L(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})}$ が上界となる．したがって，次の補題が得られる．

**補題 1.2** 線形計画問題 (1) の任意の基底解は，共通の分母 $d$ が $2^{L(\boldsymbol{A})}$ 以下，各要素の分子 $x_i'$ が $2^{L(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})}$ 以下である整数を使って，$\boldsymbol{x}^* = \frac{1}{d}(x_1', x_2', \cdots, x_m')$ と表すことができる．これより，基底解の大きさ ($l_1$ ノルム) は，$m2^{L(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})}$ 以下，あるいは $2^L/n$ 以下である．

また，これから次の系も得ることができる．

**系 1.3** 線形計画問題 (1) の任意の基底解での目的関数値は，分母の値が $2^{L(\boldsymbol{A})}$ 以下，分子の値が $2^L/mn$ 以下の分数で表すことができる．

**証明** 補題 1.2 より，基底解を分数で $\boldsymbol{x}^* = \frac{1}{d}(x_1', x_2', \cdots, x_m')$ と表し，$d$ が $2^{L(\boldsymbol{A})}$ 以下，各要素の分子 $x_i'$ が $2^{L(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})}$ 以下の整数とすることができる．このとき，目的関数値は

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^* \leq (\sum_{j=1}^{m}|c_j|)\max_j |x_j'/d| \leq \frac{1}{d}\prod_{j=1}^{m}(|c_j| + 1)2^{L(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})}$$

と評価できる．$L$ および $L(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ の定義より，この分子の大きさは $2^L/mn$ 以下である．
∎

また，次の系もすぐに得られる．

**系 1.4** 線形計画問題 (1) の二つの基底解での目的関数値が異なるならば，その差は，$2^{-2L(\boldsymbol{A})}$ 以上である．

双対問題 (2) についても同様な結果を得ることができる．例えば，補題 1.2 に対応して，次の結果が得られる．

**補題 1.5** 双対問題 (2) の任意の基底解は，共通の分母が $2^{L(\boldsymbol{A})}$ 以下，各要素の分子が $2^{L(\boldsymbol{A},\boldsymbol{c})}$ 以下の分数で表すことができる．ここで，

$$L(\boldsymbol{A},\boldsymbol{c}) = \lfloor \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \log_2(|a_{ij}|+1) + \sum_{j=1}^{n} \log_2(|c_j|+1) \rfloor + 1$$

である．

**例 1.6** 線形計画問題の例を

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & x_1 - 3x_2 + 3x_3 \\ \text{制約条件} & 3x_1 - x_2 + x_4 = 7 \\ & -x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

とする．この問題の大きさは

$$\begin{aligned} L = & \lfloor (\log_2 4 + \log_2 2 + \log_2 2 + \log_2 2 + \log_2 2 + \log_2 4) \\ & + (\log_2 8 + \log_2 4) + (\log_2 2 + \log_2 4 + \log_2 4) + \log_2 8 \rfloor + 1 \end{aligned}$$

より，$L = 22$ となる．

**演習問題 1.7** 系 1.4 を証明せよ．

**演習問題 1.8** 補題 1.5 を証明せよ．

## 1.2 線形計画問題の最適解と近似内点

標準形の線形計画問題 (1) は，最適解をもつならば，最適基底解を持つ．また，最適解の次に小さい目的関数値を持つ基底解よりも，目的関数値が小さな実行可能解を得ることができれば，そこから $O(n^3)$ の簡単な四則演算で最適解を計算することができる．(目的関数を増加させないように，実行可能解から最適解に移動すればよい．水野 [2] あるいは下の補足説明を参照せよ．) したがって，次の系が得られる．

**定理 1.9** 線形計画問題 (1) の最適解と目的関数値の差が $2^{-2L(\boldsymbol{A})}$ より小さい実行可能解を得れば，そこから $O(n^3)$ の四則演算で最適解を得ることができる．

**補足説明 1.10** 記号 $O$ の使い方を説明する．$n$ に関する 2 つの関数 $f(n)$ と $g(n)$ に対して，$n$ に関係なく定まる数 $c > 0$ が存在し，$n$ が十分大きいときに，$f(n) \le cg(n)$ が成立するならば，$f(n) = O(g(n))$ と記す．例えば，$10n^2 + 1000n - 100 = O(n^2)$ である．

**補足説明 1.11** 最適解の次に小さい目的関数値を持つ基底解より目的関数値が小さな実行可能解から，目的関数値を増加させないように移動して，最適解を一つ求めるには，例えば，次のようにする．

そのような実行可能解を $\boldsymbol{x}^0$ として，$k = 0$ とする．集合 $I(\boldsymbol{x}^k) = \{i | x_i^k = 0\}$ として，行列 $\boldsymbol{A}$ に単位行ベクトル $\boldsymbol{e}_i^T$ $(i \in I(\boldsymbol{x}^k))$ を加えた $(m + |I(\boldsymbol{x}^k)|) \times n$ 行列を $\boldsymbol{A}_k$ とする．ベクトル $\boldsymbol{c}$ を部分空間 $\{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{A}_k \boldsymbol{x} = 0\}$ に射影したベクトル

$$P(\boldsymbol{A}_k)\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}_k^T(\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{A}_k^T)^{-1}\boldsymbol{A}_k)\boldsymbol{c}$$

を計算する．これが $\boldsymbol{0}$ ベクトルならば，$\boldsymbol{x}^k$ を含む実行可能領域 (多面体) の面上で目的関数値が等しく，その面には基底解を含むので，$\boldsymbol{x}^k$ は最適解である．$\boldsymbol{0}$ ベクトルでないならば，$\boldsymbol{x}^k$ から $-P(\boldsymbol{A}_k)\boldsymbol{c}$ の方向へ動くことができ，そのとき目的関数値が減少し，$\boldsymbol{x}^k$ のゼロ要素はゼロのままである．したがって，

$$\boldsymbol{x}^k - \alpha P(\boldsymbol{A}_k)\boldsymbol{c} \ge \boldsymbol{0}$$

をみたす最大のステップサイズ $\hat{\alpha} > 0$ を求め (最適解の集合が有界ならば，$\alpha$ が無限となることはない)，$\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k - \hat{\alpha}P(\boldsymbol{A}_k)\boldsymbol{c}$ とすれば，$\boldsymbol{x}^{k+1}$ のゼロ要素の数は $\boldsymbol{x}^k$ より増加する．$k$ を 1 増加し，上の操作を繰り返す．このとき，$\boldsymbol{x}^k$ のゼロ要素が毎回増加する (実行可能領域を表す多面体の次元の低い面に移動する) ので，高々 $n - m$ 回の反復で最適基底解に到達するか，途中で $P(\boldsymbol{A}_k)\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ となり最適解が得られる．

上記の反復で，最も計算量を必要とするのは，$P(\boldsymbol{A}_k)\boldsymbol{c}$ あるいは $(\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{A}_k^T)^{-1}$ の計算である．これには $k = 0$ のときに $O(n^3)$ の計算量を必要とするが，単位ベクトルを一つ加えた行列に対して同様の計算をするときに増加する計算量は，Sherman-Morrison の公式を使えば，$O(n^2)$ である．単位ベクトルの付加は，高々 $n - m$ 回であるので，総計算量が高々 $O(n^3)$ となる．

## 1.3 人工問題とパラメータの大きさ

線形計画問題 (1) に対して，次の人工問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \rho x_{n+1} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0)x_{n+1} = \boldsymbol{b} \\ & (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^0 + \boldsymbol{z}^0 - \boldsymbol{c})^T\boldsymbol{x} + x_{n+2} = \sigma \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, x_{n+1} \geq 0, x_{n+2} \geq 0 \end{array} \tag{3}$$

を考える．ここで，$\boldsymbol{x}^0 > \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{y}^0$，$\boldsymbol{z}^0 > 0$，$\rho$，$\sigma$ は，次の条件

$$\begin{aligned} \sigma &\geq (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^0 + \boldsymbol{z}^0 - \boldsymbol{c})^T\boldsymbol{x}^0 + 1 \\ \rho &\geq (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0)^T\boldsymbol{y}^0 + 1 \end{aligned}$$

をみたす整数の定数である．人工問題 (3) の双対問題は

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} + \sigma y_{m+1} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^0 + \boldsymbol{z}^0 - \boldsymbol{c})y_{m+1} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c} \\ & (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0)^T\boldsymbol{y} + z_{n+1} = \rho \\ & y_{m+1} + z_{n+2} = 0 \\ & \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0}, z_{n+1} \geq 0, z_{n+2} \geq 0 \end{array} \tag{4}$$

となる．したがって，

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}^0 \\ 1 \\ \sigma - (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^0 + \boldsymbol{z}^0 - \boldsymbol{c})^T\boldsymbol{x}^0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}^0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{z}' = \begin{pmatrix} \boldsymbol{z}^0 \\ \rho - (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0)^T\boldsymbol{y}^0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とすれば，$\boldsymbol{x}'$ が主問題の実行可能内点，$(\boldsymbol{y}', \boldsymbol{z}')$ が双対問題の実行可能内点となる．したがって，人工問題とその双対問題が実行可能なので，それぞれ最適解を持つ．このとき，次の結果が成り立つ．

**定理 1.12** 人工問題 (3) の最適解を $\boldsymbol{x}'^* = (\boldsymbol{x}^*, x^*_{n+1}, x^*_{n+2})$ とし，その双対問題 (4) の最適解を $\boldsymbol{y}'^* = (\boldsymbol{y}^*, y^*_{m+1})$，$\boldsymbol{z}'^* = (\boldsymbol{z}^*, z^*_{n+1}, z^*_{n+2})$ とする．

1. $x^*_{n+1} = 0$ かつ $z^*_{n+2} = 0$ ならば，$\boldsymbol{x}^*$ が主問題 (1) の最適解であり，$(\boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{z}^*)$ が双対問題 (2) の最適解である．
2. 不等式 $\sigma > (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^0 + \boldsymbol{z}^0 - \boldsymbol{c})^T\hat{\boldsymbol{x}}$ を満たす主問題 (1) の最適解 $\hat{\boldsymbol{x}}$ が存在し，不等式 $\rho > (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0)^T\hat{\boldsymbol{y}}$ を満たす双対問題 (2) の最適解 $(\hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}})$ が存在するならば，$x^*_{n+1} = 0$ かつ $z^*_{n+2} = 0$ である．

**証明** $x^*_{n+1}=0$ かつ $z^*_{n+2}=0$ であると仮定する．$\boldsymbol{x}'^*$ が人工問題 (3) の実行可能解で，かつ $x^*_{n+1}=0$ であるので，$\boldsymbol{x}^*$ は主問題 (1) の実行可能解である．同様に，$(\boldsymbol{y}^*,\boldsymbol{z}^*)$ は双対問題 (2) の実行可能解である．また，それぞれ最適解であるので，相補性条件

$$x_i^* z_i^* = 0,\ i=1,2,\cdots,n,n+1,n+2$$

が成立する．実行可能解が相補性条件を満たすので，$\boldsymbol{x}^*$ は主問題 (1) の最適解であり，$(\boldsymbol{y}^*,\boldsymbol{z}^*)$ は双対問題 (2) の最適解である．

つぎに，不等式 $\sigma > (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^0+\boldsymbol{z}^0-\boldsymbol{c})^T\hat{\boldsymbol{x}}$ を満たす主問題 (1) の最適解 $\hat{\boldsymbol{x}}$ が存在し，不等式 $\rho > (\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0)^T\hat{\boldsymbol{y}}$ を満たす双対問題 (2) の最適解 $(\hat{\boldsymbol{y}},\hat{\boldsymbol{z}})$ が存在すると仮定する．このとき，

$$\begin{aligned}&\hat{x}_{n+1}=0,\ \hat{x}_{n+2}=\sigma-(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^0+\boldsymbol{z}^0-\boldsymbol{c})^T\hat{\boldsymbol{x}}\\&\hat{y}_{m+1}=0,\ \hat{z}_{n+1}=\rho-(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0)^T\hat{\boldsymbol{y}},\ \hat{z}_{n+2}=0\end{aligned}$$

とすれば，実行可能であり，相補性条件を満たすので，$\hat{\boldsymbol{x}}'=(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{x}_{n+1},\hat{x}_{n+2})$ が人工問題 (3) の最適解，$\hat{\boldsymbol{y}}'=(\hat{\boldsymbol{y}},\hat{y}_{m+1})$，$\hat{\boldsymbol{z}}'=(\hat{\boldsymbol{z}},\hat{z}_{n+1},\hat{z}_{n+2})$ がその双対問題 (4) の最適解である．ここで，$\hat{x}^{n+2}>0$ であるから，相補性条件より $z^*_{n+2}=0$ となる．同様に，$\hat{z}_{n+1}>0$ であるから，$x^*_{n+1}=0$ となる． ∎

初期点として，$\boldsymbol{x}^0=\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{y}^0=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{z}^0=\boldsymbol{e}$ と $\sigma=2^{2L}$，$\rho=2^{2L}$ を使用するとき．明らかに，初期解 $\boldsymbol{x}'$ と $(\boldsymbol{y}',\boldsymbol{z}')$ は，それぞれの問題の実行可能内点である．このとき，主問題 (1) に最適界が存在する (双対定理より，双対問題にも最適解が存在する) ならば，最適基底解が存在し，補題 1.2 より，その基底解の大きさが $2^L$ 以下なので，定理の後半の主張の条件を明らかに満たす．したがって，人工問題 (3) を解いて，最適解 $\boldsymbol{x}'^*=(\boldsymbol{x}^*,x^*_{n+1},x^*_{n+2})$ を求めれば，$x^*_{n+1}=0$ となり，$\boldsymbol{x}^*$ が主問題の最適解となる．もし，$x^*_{n+1}>0$ ならば，主問題 (1) に最適界が存在しないことが判明する．したがって，人工問題を解くことにより，元の問題を解くことが可能である．同様に，人工問題の双対問題を解くことにより，元の双対問題を解くことが可能である．

また，初期点として，$\boldsymbol{x}^0=2^{2L}\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{y}^0=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{z}^0=2^{2L}\boldsymbol{e}$ と $\sigma=2^{4L}+(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^0+\boldsymbol{z}^0-\boldsymbol{c})^T\boldsymbol{x}^0$，$\rho=2^{4L}$ を使用するとする．明らかに，初期解 $\boldsymbol{x}'$ と $(\boldsymbol{y}',\boldsymbol{z}')$ は，それぞれの問題の実行可能内点であり，

$$x_i'z_i'=2^{4L},\ i=1,2,\cdots,n,n+1,n+2$$

をみたす．この初期点は，$\mu=2^{4L}$ のときの人工問題とその双対問題の解析的中心となっている．上記の場合と同様に，この場合にも，人工問題を解くことにより，元の問題を解くことが可能である．

## 1.4 目的関数の減少率と反復回数の関係

ここでは，標準形の線形計画問題 (1) の初期の実行可能内点 $\boldsymbol{x}^0$ が既知であると仮定する．(必要ならば，前節の人工問題を考えればよい．) さらに，問題の大きさが $L$ であり，問題に最適解が存在し，最適値が $w^*$ であり，$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^0 - w^* \leq 2^{O(L)}$ であるとする．このとき，定理 1.9 より，$\boldsymbol{c}^T\hat{\boldsymbol{x}} - w^* \leq 2^{-2L}$ を満たす実行可能な内点 $\hat{\boldsymbol{x}}$ を求めれば，最適解を求めることができる．

いま，あるアルゴリズムにより，初期点 $\boldsymbol{x}^0$ から，問題 (1) の実行可能内点の列 $\{\boldsymbol{x}^k\}$ を生成したとする．このとき，次の補題が成立する．

**補題 1.13** 線形計画問題 (1) の実行可能内点の列 $\{\boldsymbol{x}^k\}$ において，$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^0 - w^* \leq 2^{O(L)}$ であり，ある定数 $\delta \in (0,1]$ が存在し，任意の $k = 0, 1, 2, \cdots$ に対して

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^{k+1} - w^* \leq \left(1 - \frac{\delta}{n}\right)(\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^k - w^*)$$

が成立するならば，$k = O(nL)$ のときに

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^k - w^* \leq 2^{-2L} \tag{5}$$

となる．より一般に，$n$ の関数 $f(n)$ に対して，

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^{k+1} - w^* \leq \left(1 - \frac{\delta}{f(n)}\right)(\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^k - w^*)$$

が成立するならば，$k = O(f(n)L)$ のときに (5) が成立する．

**証明** 対数関数の性質より，

$$\log\left(1 - \frac{\delta}{n}\right) \leq -\frac{\delta}{n}$$

が成立する．したがって，

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^k - w^* \leq \left(1 - \frac{\delta}{n}\right)^k (\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^0 - w^*) \leq \exp\left(-\frac{k\delta}{n}\right) 2^{O(L)}$$

となる．これより，$k = O(nL)$ のときに (5) が成立する．後半も同様に証明できる． ∎

これは，内点法により点列を生成するとき，最適解がすぐに計算できる実行可能な内点を求めるまでに必要となる反復回数を評価するための基本的な結果である．例えば，目的関数値と最適値との差を毎回 $1 - \frac{1}{10n}$ の割合で減少できれば，必要な反復回数が $O(nL)$ となる．

これと同じような結果が，双対問題の内点を生成する場合，あるいは主問題と双対問題の内点を同時に生成する場合にも得られる．

# 参考文献

[1] 宮川雅巳，水野眞治，矢島安敏：経営工学の数理 I，II，朝倉書店，2004

[2] 水野眞治：数理計画問題に対する内点法について，第 1 回 RAMP シンポジウム予稿集 (1989) 15–26