

学習用テキスト 内点法 (3)

# 主双対内点法のアルゴリズム

水野 眞治

東京工業大学 大学院社会理工学研究科 経営工学専攻

[http://www.me.titech.ac.jp/~mizu\\_lab/text/](http://www.me.titech.ac.jp/~mizu_lab/text/)

2010年11月9日

## 概要

線形計画問題の主問題と双対問題を同時に解く内点法のアルゴリズムを、初期の実行可能内点が既知である場合について解説する。取り上げるアルゴリズムは、アフインスケーリング法、パス追跡法、プレディクタ・コレクタ法、ポテンシャル減少法である。ここでは、アルゴリズムの考え方及び実際の計算ステップについて主に説明し、生成された点列の収束性など理論的な側面にはあまり触れない。

## 目次

1	主双対内点法のアルゴリズム	1
1.1	主双対問題	1
1.2	アフインスケーリング法	3
1.3	パス追跡法	7
1.4	プレディクタ・コレクタ法	11
1.5	ポテンシャル減少法	14

## 1 主双対内点法のアルゴリズム

はじめに、線形計画問題の主問題と双対問題を合わせた主双対問題を述べ、この節を通じて使われる問題に対する仮定を述べる。その後、各アルゴリズムを解説する。

### 1.1 主双対問題

$n$  個の非負変数と  $m$  個の等式制約をもつ標準形の線形計画問題は、

$$\begin{aligned} \text{最小化} & \quad c^T x \\ \text{制約条件} & \quad Ax = b \\ & \quad x \geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

と表される．これを主問題とするととき，双対問題は

$$\begin{aligned} & \text{最大化} && b^T y \\ & \text{制約条件} && A^T y + z = c \\ & && z \geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

となる．主問題の実行可能解  $x$  と双対問題の実行可能解  $(y, z)$  が相補性条件

$$x_i z_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

を満たすならば，この  $x$  と  $(y, z)$  はそれぞれの問題の最適解である．上の相補性条件は，ベクトル  $x$  の各要素を対角要素とする対角行列を  $X = \text{diag}(x)$  とすれば， $Xz = 0$  とあらわすことができる．したがって， $x$  が主問題の最適解であり， $(y, z)$  が双対問題の最適解であるならば

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ A^T y + z &= c \\ Xz &= 0 \\ x &\geq 0, \quad z \geq 0 \end{aligned} \tag{3}$$

を満たす．逆に，ベクトル  $(x, y, z)$  が上記 (3) の条件をすべて満たすならば， $x$  は主問題の最適解であり， $(y, z)$  は双対問題の最適解である．ゆえに，(3) を満たす解を求めることにより，線形計画問題の主問題と双対問題を同時に解くことができる．この条件 (3) を満たす  $(x, y, z)$  を求める問題を主双対問題と呼び，この条件をすべて満たす  $(x, y, z)$  を最適解と呼ぶ．集合

$$F_{PD} = \{(x, y, z) \mid Ax = b, A^T y + z = c, x \geq 0, z \geq 0\}$$

の要素を主双対問題の実行可能解といい，集合

$$F_{PD}^0 = \{(x, y, z) \mid Ax = b, A^T y + z = c, x > 0, z > 0\}$$

の要素を主双対問題の実行可能内点という．

ここで，次の仮定を置く．

仮定 1.1  $m \times n$  行列  $A$  のランクが  $m$  である．

仮定 1.2 主双対問題に実行可能内点が存在し，一つの内点  $(x^0, y^0, z^0) \in F_{PD}^0$  が既知である．

これらの仮定が成り立つとき，主双対問題 (3) は最適解をもち，最適解の集合が有界となる (演習問題) ．

主双対内点法では，初期の実行可能内点  $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0, \mathbf{z}^0) \in F_{PD}^0$  が与えられたときに，各反復で内点を更新することにより，点列  $\{(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k, \mathbf{z}^k)\}$  を生成する．一般に， $k$  番目の実行可能内点  $(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k, \mathbf{z}^k) \in F_{PD}^0$  が求められているとき，探索方向  $(\Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{y}, \Delta \mathbf{z})$  とステップサイズ  $\alpha$  を使って，次の点を

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}^{k+1} \\ \mathbf{y}^{k+1} \\ \mathbf{z}^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^k \\ \mathbf{y}^k \\ \mathbf{z}^k \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \mathbf{y} \\ \Delta \mathbf{z} \end{pmatrix} \quad (4)$$

とする．このときに，求めた点  $(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{y}^{k+1}, \mathbf{z}^{k+1})$  が実行可能内点となる必要十分条件は，

$$A\Delta \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad A^T \Delta \mathbf{y} + \Delta \mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (5)$$

を満たし，かつ  $x^{k+1} > 0$  と  $z^{k+1} > 0$  を満たすことである (演習問題)．したがって，この条件 (5) を満たす探索方向  $(\Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{y}, \Delta \mathbf{z})$  を実行可能な探索方向と呼ぶ．

補足説明 1.3 主問題の点  $\mathbf{x}^k$  にステップサイズ  $\alpha_P$ ，双対問題の点  $(\mathbf{y}^k, \mathbf{z}^k)$  にステップサイズ  $\alpha_D$  をつかって，次の点を

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}^{k+1} \\ \mathbf{y}^{k+1} \\ \mathbf{z}^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^k \\ \mathbf{y}^k \\ \mathbf{z}^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_P \Delta \mathbf{x} \\ \alpha_D \Delta \mathbf{y} \\ \alpha_D \Delta \mathbf{z} \end{pmatrix}$$

とすることも可能である．実際の計算においては，このように主問題と双対問題の変数に別々のステップサイズを使うことが多い．ここでは，簡単のため，同じステップサイズ  $\alpha$  のみを使って点列を更新する場合について説明する．

演習問題 1.4 仮定 1.2 が成り立つとき，主双対問題 (3) は最適解をもち，最適解の集合が有界となることを示せ．

演習問題 1.5 点  $(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k, \mathbf{z}^k)$  が実行可能内点であるとき，式 (4) によって計算される点  $(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{y}^{k+1}, \mathbf{z}^{k+1})$  が実行可能内点となる必要十分条件は，探索方向  $(\Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{y}, \Delta \mathbf{z})$  が条件 (5) を満たし， $x^{k+1} > 0$  かつ  $z^{k+1} > 0$  である，ことを示せ．

## 1.2 アフィンスケーリング法

線形計画問題の主双対問題を解くアフィンスケーリング法は，Monteiro, Adler, and Resende [4] によって提案された．アフィンスケーリング法では，初期の実行可能な内点

$(x^0, y^0, z^0)$  から実行可能な内点の列  $\{(x^k, y^k, z^k)\}$  を生成する．そこで， $k$  番目の内点  $(x^k, y^k, z^k)$  が得られているとして，次の内点の求め方を示す．

内点  $(x^k, y^k, z^k)$  は，実行可能であるので，

$$Ax^k = b, A^T y^k + z^k = c, x^k > 0, z^k > 0 \quad (6)$$

を満たす．関数

$$h(x, y, z) = \begin{pmatrix} Ax - b \\ A^T y + z - c \\ Xz \end{pmatrix} \quad (7)$$

を定義すると，主双対問題 (3) の最適解は，方程式系

$$h(x, y, z) = 0 \quad (8)$$

の解である．この方程式系 (8) の近似解を求めるためにニュートン法を使い，計算した方向をアルゴリズムの探索方向として採用する．一般に，非線形方程式系  $f(u) = 0$  の点  $u'$  におけるニュートン方向  $\Delta u$  は，線形方程式系  $\nabla f(u')\Delta u = -f(u')$  の解である．したがって，点  $(x^k, y^k, z^k)$  における方程式系 (8) のニュートン方向  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  は，線形方程式系

$$\nabla h(x^k, y^k, z^k) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = -h(x^k, y^k, z^k)$$

あるいは，式 (6) と (7) を使って

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & E \\ Z_k & 0 & X_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -X_k z^k \end{pmatrix} \quad (9)$$

の解となる．ここで， $E$  は単位行列， $0$  はそれぞれ適当なサイズのゼロベクトルあるいはゼロ行列， $X_k = \text{diag}(x^k)$ ， $Z_k = \text{diag}(z^k)$  である．この解  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  は，(9) より，(5) を満たす実行可能な探索方向であり，(主双対) アフィンスケーリング方向と呼ばれる．線形方程式系 (9) の解は，順に

$$\begin{aligned} \Delta y &= (AZ_k^{-1}X_kA^T)^{-1}b \\ \Delta z &= -A^T\Delta y \\ \Delta x &= -Z_k^{-1}X_k\Delta z - x^k \end{aligned} \quad (10)$$

と計算できる (演習問題)．内点  $(x^k, y^k, z^k)$  から，この方向  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  へステップサイズ  $\alpha$  だけ進んだ次の点を (4) によって求める．ただし，この点の実行可能な内点となる

よう、 $x^{k+1} > 0$  かつ  $y^{k+1} > 0$  を満たすステップサイズ  $\alpha > 0$  を決める必要がある。このとき、 $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  が (5) を満たす実行可能な探索方向なので、 $(x^{k+1}, y^{k+1}, z^{k+1})$  は、主双対問題 (3) の実行可能内点となる。

アルゴリズム 1.6 主双対アフィンスケーリング法は、次のステップから成る。

ステップ 0 主双対問題 (3) の実行可能な初期内点を  $(x^0, y^0, z^0)$  とし、 $k = 0$  とする。

ステップ 1 点  $(x^k, y^k, z^k)$  において、式 (10) により探索方向  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  を計算する。

ステップ 2 ステップサイズ  $\alpha > 0$  を決め、次の点  $(x^{k+1}, y^{k+1}, z^{k+1})$  を式 (4) により求め、反復回数  $k$  を 1 増加し、ステップ 1 へ戻る。

このアルゴリズムの途中で、十分小さな  $\epsilon > 0$  に対して、 $(x^k)^T z^k \leq \epsilon$  が成立したならば、そのときの解を主双対問題 (3) の近似的な最適解として、アルゴリズムを終了することができる。

演習問題 1.7 線形方程式系 (9) の解が、式 (10) によって計算できることを示せ。

演習問題 1.8 主双対アフィンスケーリング法の各反復で  $(x^k)^T z^k$  が単調に減少すること、あるいは

$$(x^{k+1})^T z^{k+1} = (1 - \alpha)(x^k)^T z^k$$

が成立することを示せ。

例 1.9 標準形の線形計画問題の例を

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & -x_1 - x_2 \\ \text{制約条件} & 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 + 3x_2 + x_4 = 5 \\ & (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \geq \mathbf{0} \end{array} \quad (11)$$

とすれば、その双対問題は、

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & 4y_1 + 5y_2 \\ \text{制約条件} & 2y_1 + y_2 + z_1 = -1 \\ & y_1 + 3y_2 + z_2 = -1 \\ & y_1 + z_3 = 0 \\ & y_2 + z_4 = 0 \\ & (z_1, z_2, z_3, z_4)^T \geq \mathbf{0} \end{array} \quad (12)$$

となる。主問題の内点解  $x^0 = (1, 1, 1, 1)^T$  と双対問題の内点解  $y^0 = (-1, -1)^T$ 、 $z^0 = (2, 3, 1, 1)$  が求められているとして、 $\alpha = 1/2$  のときに、主双対アフィンスケーリング法

による次の点を計算する．式 (10) より，ベクトル  $\Delta \mathbf{y} = (\Delta y_1, \Delta y_2)^T$  は，一次方程式系

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

の解であるから， $\Delta \mathbf{y} = \frac{1}{33}(24, 26)^T$  となる．これより

$$\begin{pmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \\ \Delta z_3 \\ \Delta z_4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{33} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 \\ 26 \end{pmatrix} = -\frac{1}{33} \begin{pmatrix} 74 \\ 102 \\ 24 \\ 26 \end{pmatrix}$$

となり

$$\begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{33} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 74 \\ 102 \\ 24 \\ 26 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{33} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -9 \\ -7 \end{pmatrix}$$

となる．したがって， $\alpha = 1/2$  より，次の点は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \frac{1}{33} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -9 \\ -7 \end{pmatrix} = \frac{1}{66} \begin{pmatrix} 70 \\ 67 \\ 57 \\ 59 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \frac{1}{33} \begin{pmatrix} 24 \\ 26 \end{pmatrix} = -\frac{1}{33} \begin{pmatrix} 21 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \frac{1}{33} \begin{pmatrix} 74 \\ 102 \\ 24 \\ 26 \end{pmatrix} = \frac{1}{33} \begin{pmatrix} 29 \\ 48 \\ 21 \\ 20 \end{pmatrix}$$

である．これは，実行可能内点となっている．このときの双対ギャップは

$$\mathbf{x}^T \mathbf{z} = \frac{1}{66} \frac{1}{33} (2030 + 3216 + 1197 + 1180) = \frac{7}{2}$$

となり，初期点での双対ギャップ  $(\mathbf{x}^0)^T \mathbf{z}^0 = 7$  の  $(1 - \alpha)$  倍となっている．

ちなみに，ステップサイズ  $\alpha = 1$  とすると， $\mathbf{x}$  は主問題の実行可能内点であるが， $(\mathbf{y}, \mathbf{z})$  は双対問題の実行不能内点となる．

### 1.3 パス追跡法

Kojima, Mizuno, and Yoshise [1] によって提案された主双対パス追跡法を解説する。仮定 1.2 より，定数  $\mu > 0$  に対して，双対ギャップが一定の集合

$$\begin{aligned} \hat{F}_{PD}(n\mu) &= \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \mid \mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mathbf{b}^T \mathbf{y} = n\mu, \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{A}^T \mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{c}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{z} \geq \mathbf{0}\} \\ &= \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \mid \mathbf{x}^T \mathbf{z} = n\mu, \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{A}^T \mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{c}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{z} \geq \mathbf{0}\} \end{aligned}$$

は，有界な多面体となり，解析的中心  $(\mathbf{x}(\mu), \mathbf{y}(\mu), \mathbf{z}(\mu))$  をもつ。解析的中心は，

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{A}^T \mathbf{y} + \mathbf{z} &= \mathbf{c} \\ \mathbf{X}\mathbf{z} &= \mu \mathbf{e} \end{aligned}$$

あるいは

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) - \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mu \mathbf{e} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (13)$$

と  $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ ， $\mathbf{z} > \mathbf{0}$  を満たす解である。解析的中心の集合

$$P = \{(\mathbf{x}(\mu), \mathbf{y}(\mu), \mathbf{z}(\mu)) \mid \mu > 0\}$$

は，中心パスと呼ばれる。主双対問題が最適解をもつとき， $\mu \rightarrow 0$  とすれば，解析的中心  $(\mathbf{x}(\mu), \mathbf{y}(\mu), \mathbf{z}(\mu))$  は，その最適解の一つ（最適解集合の解析的中心）に収束する。したがって， $\mu \rightarrow 0$  となるように，このパスの近傍に点列を生成することにより，主双対問題の近似的な最適解を求めることができる。これが，主双対パス追跡法の基本的な考え方である。

中心パスの近傍，すなわち中心パスをその内部に含み，実行可能内点の集合  $F_{PD}^0$  に含まれる集合を  $N$  とし， $N$  上の初期点  $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0, \mathbf{z}^0)$  が既知であるとする。この内点  $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0, \mathbf{z}^0)$  から，パスの近傍  $N$  上に内点の列  $\{(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k, \mathbf{z}^k)\}$  を生成する。そこで， $k$  番目の内点  $(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k, \mathbf{z}^k) \in N$  が得られているとして，次の内点の求め方を示す。

内点  $(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k, \mathbf{z}^k)$  は，パラメータの値が  $\mu_k = (\mathbf{x}^k)^T \mathbf{z}^k / n$  のときの集合  $\hat{F}_{PD}(n\mu_k)$  上の点である。多面体  $\hat{F}_{PD}(n\mu)$  の解析的中心  $(\mathbf{x}(\mu_k), \mathbf{y}(\mu_k), \mathbf{z}(\mu_k))$  を目指すと，パスに近づくことができても，目的関数値（双対ギャップ）を減少させることができない。そこで，定数  $\gamma \in [0, 1]$  に対して

$$\mu = \gamma \mu_k \quad (14)$$

としたときの解析的中心  $(x(\mu), y(\mu), z(\mu))$  を目標とする．その解析的中心が方程式系 (13) の解であるので，現在の点  $(x^k, y^k, z^k)$  からニュートン法を使い，その解析的中心を目指す．ニュートン方向を  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  とすれば，それは線形方程式系

$$\nabla h(x^k, y^k, z^k) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = - \left( h(x^k, y^k, z^k) - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu e \end{pmatrix} \right)$$

あるいは

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^T & \mathbf{E} \\ \mathbf{Z}_k & \mathbf{0} & \mathbf{X}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mu e - \mathbf{X}_k z^k \end{pmatrix} \quad (15)$$

の解である．この解  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  は，(5) を満たす実行可能な探索方向である．この探索方向は， $\gamma = 0$  のとき，アフィンスケーリング方向と一致し， $\gamma = 1$  のとき，目的関数値を減少させずに解析的中心を求める方向になり，(主双対) センタリング方向と呼ばれる．上の方程式系の解は，順に

$$\begin{aligned} \Delta y &= (\mathbf{AZ}_k^{-1} \mathbf{X}_k \mathbf{A}^T)^{-1} (\mathbf{b} - \mu \mathbf{AZ}_k^{-1} \mathbf{e}) \\ \Delta z &= -\mathbf{A}^T \Delta y \\ \Delta x &= -\mathbf{Z}_k^{-1} \mathbf{X}_k \Delta z + (\mu \mathbf{Z}_k^{-1} \mathbf{e} - x^k) \end{aligned} \quad (16)$$

と計算できる．内点  $(x^k, y^k, z^k)$  から，この方向  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  ヘステップサイズ  $\alpha$  だけ進んだ次の点を (4) によって求める．ただし，次の点がパスの近傍  $N$  上の点となるようにステップサイズ  $\alpha > 0$  を決める必要がある．このとき， $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  が実行可能な探索方向であるので，点  $(x^{k+1}, y^{k+1}, z^{k+1})$  が主双対問題 (3) の実行可能内点となる．

アルゴリズム 1.10 主双対パス追跡法は，次のステップから成る．

ステップ 0 中心パスの近傍  $N$  を定め，初期内点を  $(x^0, y^0, z^0) \in N$ ， $\gamma \in [0, 1)$ ， $k = 0$  とする．

ステップ 1 点  $(x^k, y^k, z^k)$  において， $\mu_k = (x^k)^T z^k / n$ ， $\mu = \gamma \mu^k$  とし，式 (16) により探索方向  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  を計算する．

ステップ 2 次の点  $(x^{k+1}, y^{k+1}, z^{k+1})$  が中心パスの近傍  $N$  上の点となるようにステップサイズ  $\alpha > 0$  を決め，式 (4) により内点を更新する．反復回数  $k$  を 1 増加し，ステップ 1 へ戻る．

パスの近傍としては，定数  $\beta \in (0, 1)$  に対して，次の 2 種類

$$\begin{aligned} N_{-\infty}(\beta) &= \{(x, y, z) \in F_{PD}^0 \mid Xz \geq (1 - \beta)\mu e, \mu = x^T z / n\} \\ N_2(\beta) &= \{(x, y, z) \in F_{PD}^0 \mid \|\mathbf{X}z - \mu e\| \leq \beta \mu, \mu = x^T z / n\} \end{aligned}$$

がよく使われる．アルゴリズム 1.10 は，近傍として  $N_{-\infty}(\beta)$  を使うときにロングステップ・パス追跡法と呼ばれ， $N_2(\beta)$  を使うときにショートステップ・パス追跡法と呼ばれることがある．それは，次元  $n$  が大きい時には，近傍  $N_{-\infty}(\beta)$  の方が， $N_2(\beta)$  よりかなり広く，実際に問題を解くときのステップサイズが長くなる場合が多いからである．ただし，長いステップサイズをとると，点列が実行可能領域の境界に近づくため，理論的に反復回数を評価すると，ショートステップ・パス追跡法が  $O(\sqrt{n}L)$  であるのに対して，ロングステップ・パス追跡法は  $O(nL)$  となってしまう，ショートステップ・パス追跡法の方が反復回数の上界が少ないという結果が得られている．

パス追跡法では，パスの近傍  $N$  を前もって定めて，そこに点列を生成するが，実際の計算では，近傍を使わなくてもよい．探索方向を求めた後に，実行可能領域の境界に達するまでのステップサイズにある定数  $\lambda \in (0, 1)$  を乗じて，ステップサイズを決めるという方法もある．

演習問題 1.11 線形方程式系 (15) の解が，式 (16) によって計算できることを示せ．

演習問題 1.12 パス追跡法の各反復で，双対ギャップ  $(x^k)^T z^k$  が単調に減少することを示せ．また， $\gamma = 1$  として（センタリング方向を使って）点を更新すると，双対ギャップ  $(x^k)^T z^k$  が変化しないことを示せ．

演習問題 1.13  $n = 3$  であるとき，近傍  $N_{-\infty}(1/2)$  と単体  $S_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \geq \mathbf{0} \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$  の交わりを図示せよ．また，近傍  $N_2(1/2)$  と単体  $S_3$  の交わりを図示せよ．

例 1.14 例 1.9 で扱った標準形の線形計画問題 (11)

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & -x_1 - x_2 \\ \text{制約条件} & 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 + 3x_2 + x_4 = 5 \\ & (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \geq \mathbf{0} \end{array}$$

とその双対問題 (12) を扱う．主問題の内点解  $x^0 = (1, 1, 1, 1)^T$  と双対問題の内点解  $y^0 = (-1, -1)^T$ ， $z^0 = (2, 3, 1, 1)$  が求められているとして，主双対パス追跡法による次の点を計算する．パラメータ  $\mu^0 = (x^0)^T z^0 / 4 = 7/4$  である． $\gamma = 1/2$  として， $\mu = \gamma\mu^0 = 7/8$  とする．式 (16) より，ベクトル  $\Delta y = (\Delta y_1, \Delta y_2)^T$  は，一次方程式系

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{7}{8} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

の解であるから,

$$\begin{pmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{528} \begin{pmatrix} 153 \\ 262 \end{pmatrix}$$

となる. これより

$$\begin{pmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \\ \Delta z_3 \\ \Delta z_4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{528} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 153 \\ 262 \end{pmatrix} = -\frac{1}{528} \begin{pmatrix} 568 \\ 939 \\ 153 \\ 262 \end{pmatrix}$$

となり

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{pmatrix} &= \frac{1}{528} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 568 \\ 939 \\ 153 \\ 262 \end{pmatrix} + \frac{7}{8} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{528} \begin{pmatrix} -13 \\ -61 \\ 87 \\ 196 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる.  $\alpha = 1$  とすれば, 次の点は

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{528} \begin{pmatrix} -13 \\ -61 \\ 87 \\ 196 \end{pmatrix} = \frac{1}{528} \begin{pmatrix} 515 \\ 467 \\ 615 \\ 724 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{528} \begin{pmatrix} 153 \\ 262 \end{pmatrix} = -\frac{1}{528} \begin{pmatrix} 375 \\ 266 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{528} \begin{pmatrix} 568 \\ 939 \\ 153 \\ 262 \end{pmatrix} = \frac{1}{528} \begin{pmatrix} 488 \\ 645 \\ 375 \\ 266 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である. これは, 実行可能内点となっている. このときの双対ギャップは

$$\mathbf{x}^T \mathbf{z} = \frac{1}{528} \frac{1}{528} (515 \times 488 + 467 \times 645 + 615 \times 375 + 724 \times 266) = \frac{7}{2}$$

となり, 初期点での双対ギャップ  $(\mathbf{x}^0)^T \mathbf{z}^0 = 7$  の  $(1 - \alpha + \alpha\gamma)$  倍となっている.

この場合，主問題の目的関数値が増加している．主問題の目的関数が増加しているけれども，それを上回って双対問題の目的関数値が増加しているので，双対ギャップが減少していることを観測できる．

## 1.4 プレディクタ・コレクタ法

ここでは，Mizuno, Todd, and Ye [3] によって提案されたプレディクタ・コレクタ法を解説する．この方法は， $0 < \beta_1 < \beta_2 < 1$  を満たす二つのパラメータに対して，中心パスの大小二つの近傍  $N_2(\beta_2)$  と  $N_2(\beta_1)$  を使う．小さいほうの近傍  $N_2(\beta_1)$  上の初期点  $(x^0, y^0, z^0)$  がわかっているときに，この近傍  $N_2(\beta_1)$  上に点列  $\{(x^k, y^k, z^k)\}$  を生成する．ただし，各反復はプレディクタステップとコレクタステップからなり，プレディクタステップ後に計算される中間点は大きい方の近傍  $N_2(\beta_2)$  上にある． $k$  番目の点  $(x^k, y^k, z^k) \in N_2(\beta_1)$  が求められているとして，次の点の求め方を説明する．

内点  $(x^k, y^k, z^k) \in N_2(\beta_1)$  において，アフィンスケーリング方向，すなわち方程式系 (9) の解  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  を式 (10) を使って計算する．このとき，この探索方向に進み，近傍  $N_2(\beta_2)$  上にとどまる最大ステップサイズ

$$\hat{\alpha} = \max\{\alpha' \mid (x^k + \alpha\Delta x, y^k + \alpha\Delta y, z^k + \alpha\Delta z) \in N_2(\beta_2) \text{ for any } \alpha \in [0, \alpha']\} \quad (17)$$

を求める．そして，中間点

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^k \\ y^k \\ z^k \end{pmatrix} + \hat{\alpha} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \quad (18)$$

を計算する．ここまですプレディクタステップという．つまり，プレディクタステップは，アフィンスケーリング法の 1 反復を実施するが，そのステップサイズを近傍  $N_2(\beta_2)$  上にとどまる最大値にするところに特徴がある．

中間点  $(x', y', z')$  において，センタリング方向，すなわち  $\gamma = 1$  かつ  $\mu' = (x')^T z' / n$  としたときの方程式系 (15) の解  $(\Delta x', \Delta y', \Delta z')$  を式 (16) と同様に，

$$\begin{aligned} \Delta y' &= (A(Z')^{-1} X' A^T)^{-1} (b - \mu' A(Z')^{-1} e) \\ \Delta z' &= -A^T \Delta y' \\ \Delta x' &= -(Z')^{-1} X' \Delta z' + (\mu' (Z')^{-1} e - x') \end{aligned} \quad (19)$$

を使って計算する．ステップサイズを  $\alpha = 1$  として，式 (4) と同様に次の点を

$$\begin{pmatrix} x^{k+1} \\ y^{k+1} \\ z^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x' \\ \Delta y' \\ \Delta z' \end{pmatrix} \quad (20)$$

とする．このとき，たとえば  $\beta_1 = 1/4$  かつ  $\beta_2 = 1/2$  であれば，点  $(x^{k+1}, y^{k+1}, z^{k+1})$  が小さい方の近傍  $N_2(\beta_1)$  上にあることを示すことができる．ここまでのステップがコレクタステップである．

アルゴリズム 1.15 Mizuno-Todd-Ye のプレディクタ・コレクタ法は，次のステップから成る．

ステップ 0  $\beta_1 = 1/4, \beta_2 = 1/2$  とし，初期内点を  $(x^0, y^0, z^0) \in N_2(\beta_1), k = 0$  とする．

ステップ 1(プレディクタステップ) 点  $(x^k, y^k, z^k)$  において，式 (10) を使ってアフィンスケーリング方向  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  を計算する．式 (17) によりステップサイズ  $\hat{\alpha}$  を求め，式 (18) により中間点  $(x', y', z')$  を求める．

ステップ 2(コレクタステップ) 点  $(x', y', z')$  において， $\gamma = 1$  とし，センタリング方向  $(\Delta x', \Delta y', \Delta z')$  を式 (19) を使って計算する．ステップサイズ  $\alpha = 1$  として，式 (20) により次の実行可能な内点  $(x^{k+1}, y^{k+1}, z^{k+1})$  を求める．反復回数  $k$  を 1 増加し，ステップ 1 へ戻る．

演習問題 1.16 プレディクタ・コレクタ法の各反復で，双対ギャップ  $(x^k)^T z^k$  が単調に減少することを示せ．

演習問題 1.17 プレディクタ・コレクタ法で生成される点列が実行可能内点であることを示せ．

例 1.18 例 1.9 で扱った標準形の線形計画問題 (11)

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & -x_1 - x_2 \\ \text{制約条件} & 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 + 3x_2 + x_4 = 5 \\ & (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \geq \mathbf{0} \end{array}$$

とその双対問題 (12) について，コレクタステップにおける更新計算を示し，得られた内点が解析的中心に近づくことをみる．主問題の内点解  $x' = (1, 1, 1, 1)^T$  と双対問題の内点解  $y' = (-1, -1)^T, z' = (2, 3, 1, 1)$  が求められているとして，プレディクタ・コレクタ法のコレクタステップの実施後の点を計算する．パラメータ  $\mu' = (x')^T z' / 4 = 7/4$

である．式 (19) より，ベクトル  $\Delta y' = (\Delta y'_1, \Delta y'_2)^T$  は，一次方程式系

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta y'_1 \\ \Delta y'_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{7}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

の解であるから，

$$\begin{pmatrix} \Delta y'_1 \\ \Delta y'_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{264} \begin{pmatrix} -39 \\ 54 \end{pmatrix}$$

となる．これより

$$\begin{pmatrix} \Delta z'_1 \\ \Delta z'_2 \\ \Delta z'_3 \\ \Delta z'_4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{264} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -39 \\ 54 \end{pmatrix} = \frac{1}{264} \begin{pmatrix} 24 \\ -123 \\ 39 \\ -54 \end{pmatrix}$$

となり

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Delta x'_1 \\ \Delta x'_2 \\ \Delta x'_3 \\ \Delta x'_4 \end{pmatrix} &= -\frac{1}{264} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 \\ -123 \\ 39 \\ -54 \end{pmatrix} + \frac{7}{4} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{264} \begin{pmatrix} -45 \\ -69 \\ 159 \\ 252 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる． $\alpha = 1$  とすれば，次の点は

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{264} \begin{pmatrix} -45 \\ -69 \\ 159 \\ 252 \end{pmatrix} = \frac{1}{264} \begin{pmatrix} 219 \\ 195 \\ 423 \\ 516 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{264} \begin{pmatrix} -39 \\ 54 \end{pmatrix} = -\frac{1}{264} \begin{pmatrix} 303 \\ 210 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{264} \begin{pmatrix} 24 \\ -123 \\ 39 \\ -54 \end{pmatrix} = \frac{1}{264} \begin{pmatrix} 552 \\ 669 \\ 303 \\ 210 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である．これは，実行可能内点となっている．このときの双対ギャップは

$$\mathbf{x}^T \mathbf{z} = \frac{1}{264} \frac{1}{264} (219 \times 552 + 195 \times 669 + 423 \times 303 + 516 \times 210) = 7$$

となり，元の点での双対ギャップ  $\mathbf{x}'^T \mathbf{z}' = 7$  と変わらない．また，

$$\mathbf{X} \mathbf{z} = \begin{pmatrix} x_1 z_1 \\ x_2 z_2 \\ x_3 z_3 \\ x_4 z_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{264} \frac{1}{264} \begin{pmatrix} 120888 \\ 130455 \\ 128169 \\ 108360 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}' \mathbf{z}' = \begin{pmatrix} x'_1 z'_1 \\ x'_2 z'_2 \\ x'_3 z'_3 \\ x'_4 z'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となっており， $\mathbf{X} \mathbf{z}$  の各要素がほぼ同じような値であるので，点  $(x, y, z)$  が点  $(x', y', z')$  よりも，センターに近づいていることが分かる．

## 1.5 ポテンシャル減少法

Kojima, Mizuno, and Yoshise [2] によって提案された主双対問題に対するポテンシャル減少法を解説する．パス追跡法では，中心パスの近傍内に点列を生成することにより，境界に近づかないような点列を生成したが，近傍内にとどまるために，ステップサイズが小さくなりやすいという欠点がある．ポテンシャル減少法では，境界に近づくと発散するが，最適解に近づくと減少するポテンシャル関数を定義し，それが減少するようにステップサイズを決めることにより，点列を生成する．パス追跡法のような近傍を使う必要がないという利点がある．

主双対問題 (3) の実行可能内点  $(x, y, z)$  におけるポテンシャル関数を，定数  $\nu \geq 0$  を使って

$$f_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \nu \log \mathbf{x}^T \mathbf{z} + n \log \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{z}}{n} - \sum_{i=1}^n \log x_i z_i$$

と定義する．これは，主双対ポテンシャル関数と呼ばれている．相加相乗平均の不等式から，第 2 項の値は第 3 項の値以上であるので，

$$f_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \geq \nu \log \mathbf{x}^T \mathbf{z} \tag{21}$$

が成立する．したがって，小さな  $\epsilon > 0$  に対して，このポテンシャル関数の値が  $\nu \log \epsilon$  以下になる実行可能解  $(x, y, z)$  を得ることができれば， $\mathbf{x}^T \mathbf{z} \leq \epsilon$  となるので，主双対問題の近似的な最適解が得られる．ポテンシャル減少法は，初期の実行可能内点  $(x^0, y^0, z^0)$  から，各反復においてポテンシャル関数が減少するような点を求め，内点列  $\{(x^k, y^k, z^k)\}$  を生成することにより，そのような近似解を求める方法である． $k$  番目の実行可能内点

$(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k, \mathbf{z}^k) \in F_{PD}^0$  が得られているとして, 次の点  $(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{y}^{k+1}, \mathbf{z}^{k+1})$  の求め方を説明する.

実行可能内点  $(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k, \mathbf{z}^k) \in F_{PD}^0$  が得られているとき, 探索方向  $(\Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{y}, \Delta \mathbf{z})$  とステップサイズ  $\alpha$  を使って, (4) により次の点を計算する. 探索方向は, パス追跡法と同様に線形方程式系 (15) を解き, (16) を使って求める. ここで, パラメータ  $\mu = \gamma \mu_k$  の決め方にはさまざまな方法があるが, Kojima, Mizuno, and Yoshise [2] では,  $\gamma = \frac{n}{n+\nu}$  としている. また, ステップサイズ  $\alpha$  は, ポテンシャル関数

$$f_\nu(\mathbf{x}^k + \alpha \Delta \mathbf{x}, \mathbf{z}^k + \alpha \Delta \mathbf{z}) \quad (22)$$

の値が最小となるよう, 一次元探索などを使い近似的に求める.

アルゴリズム 1.19 主双対ポテンシャル減少法は, 次のステップから成る.

ステップ 0 初期内点  $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0, \mathbf{z}^0)$ ,  $\gamma \in [0, 1)$ ,  $\nu > 0$ ,  $k = 0$  とする.

ステップ 1 点  $(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k, \mathbf{z}^k)$  において,  $\mu = \gamma \mu_k$  として式 (16) を使って探索方向  $(\Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{y}, \Delta \mathbf{z})$  を計算する.

ステップ 2 ポテンシャル関数 (22) の値がなるべく小さくなるようにステップサイズ  $\alpha > 0$  を定め, 次の点  $(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{y}^{k+1}, \mathbf{z}^{k+1})$  を式 (4) により求める. 反復回数  $k$  を 1 増加し, ステップ 1 へ戻る.

演習問題 1.20 不等式 (21) が成立することを示せ.

演習問題 1.21 ポテンシャル減少法の各反復で生成される点の実行可能内点であることを示せ.

## 参考文献

- [1] Kojima, M., Mizuno, S. and Yoshise, A.: “A Primal-Dual Interior Point Algorithm for Linear Programming”, *Progress in Mathematical Programming, Interior Point and Related Methods* (ed. N. Megiddo) Springer, New York (1989) 29–47.
- [2] Kojima, M., Mizuno, S. and Yoshise, A.: “An  $O(\sqrt{n}L)$  Iteration Potential Reduction Algorithm for Linear Complementarity Problems”, *Mathematical Programming* 50 (1991) 331–342.
- [3] Mizuno, S., Todd, M. J. and Ye, Y.: “On Adaptive-Step Primal-Dual Interior-Point Algorithms for Linear Programming”, *Mathematics of Operations research*

18 (1993) 964–981.

- [4] Monteiro, R. D. C., Adler, I. and Resende, M. G. C.: “A polynomial-time primal-dual affine scaling algorithm for linear and convex quadratic programming and its power series extension,” *Mathematics of Operations Research* 15 (1990) 191–214.