学習用テキスト 内点法 (5)

自己双対線形計画問題と内点法*1

水野 眞治

東京工業大学 大学院社会理工学研究科 経営工学専攻

http://www.me.titech.ac.jp/~mizu_lab/text/

2010 年 11 月 9 日

概要

線形計画問題は，双対問題が主問題と同値である場合に自己双対であるといわれる．自己双対線形計画問題は，実行可能ならば最適解を持ち，最適値が 0 になるという特徴を持つ．ここでは，自己双対線形計画問題となる条件を示し，その問題を解く内点法を解説する．また，初期内点が簡単に得られない標準形の線形計画問題に対して，Ye, Todd, and Mizuno [13] により提案された，自己双対な人工の線形計画問題を使って解く方法を解説する．この問題を解くときには，内点法などで強相補解を求める必要があり，単体法を適用することはできない．この方法には，人工問題の実行可能な初期点が得られるのでインフィージブル内点法を使う必要がない，人工問題にビッグ M と呼ばれる大きな係数を必要としない，といった特徴がある．

目次

1 自己双対線形計画問題と内点法

1.1 はじめに

自己双対線形計画問題は，その双対問題が主問題と一致する問題である．ここでは，線形計画問題が自己双対となる条件を述べ，自己双対線形計画問題の性質を調べる．自己双

*1 本論は，水野 [6] をもとに加筆修正を加えたものである．

対線形計画問題には，普通の線形計画問題にはない大きな特徴が二つある．それは，自己双対線形計画問題が実行可能ならば，かならず最適解を持つことと，そのときの最適値が必ず 0 となることである．

自己双対線形計画問題は，与えられた線形計画問題を内点法で解く場合に利用することができる．線形計画問題を解く内点法は，Karmarkar [2] により提案されて以来，活発に研究されてきが，線形計画問題を実際に内点法で解く場合に重要な問題の一つに，初期内点をいかに求めるかといったことがある．これにはいくつかのアプローチがあり，大きな係数を使った人工問題を作る方法，初期点を求めるための人工問題を使う方法，勝手な正の初期点を使うインフィージブル内点法などがある．ここでは，自己双対計画問題を使う方法を紹介する．この方法は，Ye, Todd, and Mizuno [13] により提案され，その後，Xu, Hung, and Ye [11]，Xu and Ye [12]，Nesterov, Todd, and Ye [10]，Mizuno and Todd [7] らによりさらに研究された．この方法の特徴には，勝手な初期内点を使うことができる，インフィージブル内点法を使う必要がない，実行不能な線形計画問題を判定できる，実行可能な場合には解を計算できる，ビッグ M と呼ばれる大きな係数を必要としないといったことがあげられる．

次節では，線形計画問題とその双対問題を一般的な形で表し，その間に成り立つ性質をまとめる．1.3 節では，1.2 節で導入した線形計画問題が自己双対となる条件を示し，そのときの性質をまとめる．1.4 節では，自己双対線形計画問題を解く内点法を紹介する．1.5 節で，自己双対線形計画問題を使うことにより，標準形の線形計画問題を解く方法を Ye, Todd, and Mizuno [13] に従い紹介する．

1.2 線形計画問題と双対理論

一般形の線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{c}_1^T\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{c}_2^T\boldsymbol{x}_2 \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{b}_1 \\ & \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{x}_2 \geq \boldsymbol{b}_2 \\ & \boldsymbol{x}_2 \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{1}$$

を考える．ここで，$\boldsymbol{A}_{11}$，$\boldsymbol{A}_{12}$，$\boldsymbol{A}_{21}$，$\boldsymbol{A}_{22}$，$\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$，$\boldsymbol{c}_1$，$\boldsymbol{c}_2$ は与えられたデータであり，$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ は変数を表すベクトルである．適当な自然数 m_1，m_2，n_1，n_2 に対して，$\boldsymbol{A}_{11}$，$\boldsymbol{A}_{12}$，$\boldsymbol{A}_{21}$，$\boldsymbol{A}_{22}$ は順に $m_1 \times n_1$ 行列，$m_1 \times n_2$ 行列，$m_2 \times n_1$ 行列，$m_2 \times n_2$ 行列であり，$\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$，$\boldsymbol{c}_1$，$\boldsymbol{c}_2$ は順に m_1 次元ベクトル，m_2 次元ベクトル，n_1 次元ベクトル，n_2 次元ベクトルである．また，$\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ はそれぞれ n_1 次元と n_2 次元の変数ベクトルである．

上の一般形の問題 (1) を主問題とするとき，その双対問題は

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & \boldsymbol{b}_1^T\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{b}_2^T\boldsymbol{y}_2 \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}_{11}^T\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{A}_{21}^T\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{c}_1 \\ & \boldsymbol{A}_{12}^T\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{A}_{22}^T\boldsymbol{y}_2 \leq \boldsymbol{c}_2 \\ & \boldsymbol{y}_2 \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{2}$$

と表される．ここで，$\boldsymbol{y}_1$ と $\boldsymbol{y}_2$ はそれぞれ m_1 次元と m_2 次元の変数ベクトルである．

つぎに，線形計画問題の主問題と双対問題に関する基本的性質をいくかまとめて示す．

1. 双対問題の双対問題は，主問題と一致する．したがって，以下の性質は主問題と双対問題を入れ替えても成立する．
2. 主問題に最適解が存在すれば，双対問題にも最適解が存在し，その最適値は等しい．
3. 主問題が実行可能であるがその最適解が存在しないならば，双対問題は実行不能である．
4. 主問題が実行不能であるならば，双対問題は実行可能で最適解を持たないか，あるいは実行不能である．
5. 主問題と双対問題が実行可能であれば，ともに最適解を持ち，任意の最適解において相補性条件が成立する．ここで，相補性条件とは，主問題の不等式制約と対応する双対問題の不等式制約のいずれか一方が等式で成立することである．より正確にいえば，主問題にスラック変数 $\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{b}_2$，$\boldsymbol{x}_3 \geq \boldsymbol{0}$，双対問題にスラック変数 $\boldsymbol{y}_3 = \boldsymbol{c}_2 - \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{y}_2$，$\boldsymbol{y}_3 \geq \boldsymbol{0}$ を導入するとき，主問題の不等式 $\boldsymbol{x}_2 \geq \boldsymbol{0}$ に対応する双対問題の不等式が $\boldsymbol{y}_3 \geq \boldsymbol{0}$ であるので，$\boldsymbol{x}_2 = (x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2n_2})^T$，$\boldsymbol{y}_3 = (y_{31}, y_{32}, \cdots, y_{3n_2})^T$ とすれば，条件

   $$x_{2i} = 0 \quad \text{or} \quad y_{3i} = 0 \quad \text{for each} \quad i \in \{1, 2, \cdots, n_2\}$$

   が成立する．同様に，主問題の不等式 $\boldsymbol{x}_3 \geq \boldsymbol{0}$ に対応する双対問題の不等式が $\boldsymbol{y}_2 \geq \boldsymbol{0}$ であるので，$\boldsymbol{x}_3 = (x_{31}, x_{32}, \cdots, x_{3m_2})^T$，$\boldsymbol{y}_2 = (y_{21}, y_{22}, \cdots, y_{2m_2})^T$ とすれば，条件

   $$x_{3i} = 0 \quad \text{or} \quad y_{2i} = 0 \quad \text{for each} \quad i \in \{1, 2, \cdots, m_2\}$$

   が成立する．別な表現をすると

   $$\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{y}_3 = \boldsymbol{0} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{X}_3\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{0} \tag{3}$$

   が成立する．ここで，$\boldsymbol{X}_2 = \mathrm{diag}(\boldsymbol{x}_2)$ と $\boldsymbol{X}_3 = \mathrm{diag}(\boldsymbol{x}_3)$ は，それぞれベクトル $\boldsymbol{x}_2$ と $\boldsymbol{x}_3$ の要素を対角要素とする対角行列を表す．

6. 主問題と双対問題が実行可能であれば，強相補性条件をみたす最適解 (強相補解と呼ぶ) が存在する．強相補性条件とは，上記の相補性条件において，一方の不等式が等号で成立するとき他方の不等式が等号ではなく不等号で成立する場合をいい，数式を使って
$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{y}_3 = \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{y}_3 > \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{X}_3\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{x}_3 + \boldsymbol{y}_2 > \boldsymbol{0} \end{array}$$
と表すことができる．
7. 主問題の実行可能解 $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ と双対問題の実行可能解 $(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2)$ が条件
$$\boldsymbol{x}_2^T\boldsymbol{y}_3 + \boldsymbol{x}_3^T\boldsymbol{y}_2 = 0 \tag{4}$$
をみたすならば，それぞれの最適解である．ここで，$\boldsymbol{x}_3$ と $\boldsymbol{y}_3$ は，上で定義したスラック変数ベクトルである．また，上記の条件 (4) は，非負変数ベクトル $(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) \geq \boldsymbol{0}$ と $(\boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3) \geq \boldsymbol{0}$ に対しては相補性条件 (3) と同値である．

これらの性質のほとんどは，標準的な線形計画法の教科書に述べられている．強相補解の存在については，例えば本シリーズの「強相補解」を参考にしていただきたい．

1.3 自己双対線形計画問題

前節で，線形計画問題 (1) とその双対問題 (2) を導入した．ここで，双対問題が元の主問題と一致するとき，その問題は，**自己双対**であるといわれる，あるいは**自己双対線形計画問題**とよばれる．

双対問題 (2) と主問題 (1) を比較するために，双対問題の目的関数に -1 を乗じて最小化問題とし，制約式に -1 を乗じれば，双対問題は
$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & -\boldsymbol{b}_1^T\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{b}_2^T\boldsymbol{y}_2 \\ \text{制約条件} & -\boldsymbol{A}_{11}^T\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{A}_{21}^T\boldsymbol{y}_2 = -\boldsymbol{c}_1 \\ & -\boldsymbol{A}_{12}^T\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{A}_{22}^T\boldsymbol{y}_2 \geq -\boldsymbol{c}_2 \\ & \boldsymbol{y}_2 \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$
と表すことができる．この双対問題と主問題 (1) を比較することにより，次の結果が得られる．

定理 1.1 線形計画問題 (1) は，条件

$$
\begin{array}{l}
n_1 = m_1,\ n_2 = m_2 \\
\begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{c}_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix}^T
\end{array}
$$

が成立するならば，自己双対である．

この定理における最後の条件は，制約条件式の係数行列が歪対称行列 (skew-symmetric matix) となっていることである．自己双対線形計画問題にも前節で述べた性質が成り立つことから，次の結果が得られる．

定理 1.2 問題 (1) において定理 1.1 の条件が成立するとき，自己双対問題 (1) は次の性質を持つ．

1. 実行可能ならば最適解が存在し，最適値は 0 である．
2. 問題 (1) の任意の最適解 $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ において，$\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{b}_2$ とすれば，相補性条件
$$\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0}$$
が成立する．逆に，問題 (1) の実行可能解 $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ において，$\boldsymbol{x}_2^T\boldsymbol{x}_3 = 0$ (あるいは相補性条件 $\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0}$) が成立するならば，それは最適解である．ここで，$\boldsymbol{X}_2 = \mathrm{diag}(\boldsymbol{x}_2)$ である．
3. 問題 (1) が実行可能ならば，強相補解が存在する．ここで，強相補解とは，$\boldsymbol{x}_2 = (x_{21}, x_{22}.\cdots.x_{2n_2})^T$，$\boldsymbol{x}_3 = (x_{31}, x_{32}.\cdots.x_{3n_2})^T$ とするとき，すべての $i \in \{1, 2, \cdots, n_2\}$ に対して，条件
$$x_{2i} = 0 \quad \text{and} \quad x_{3i} > 0$$
または
$$x_{2i} > 0 \quad \text{and} \quad x_{3i} = 0$$
をみたす解である．この条件を数式を使って表現すれば
$$\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3 > \boldsymbol{0}$$
となる．

証明 自己双対問題 (1) の双対問題は，主問題と一致する．(ただし，双対問題は最大化問題でその目的関数は異符号である．) したがって，主問題が実行可能ならば，双対問題も実行可能であるから，それぞれの問題の最適解が存在する．また，最適値は，主問題と双対問題で等しく，主問題の目的関数と双対問題の目的関数の符号が異なることから，ともに 0 である．線形計画問題の主問題と双対問題の最適解が相補性条件をみたし，強相補解が存在することから，自己双対問題の最適解にも同様なことがいえるので，定理に述べたことが成立する． ∎

1.4 自己双対線形計画問題に対する内点法

前節の結果より，定理 1.1 の条件をみたすとき，自己双対線形計画問題の最適解は

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x}_2 \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}_3 \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{5}$$

を満たす．逆に，この問題の解は，自己双対線形計画問題の最適解である．この問題は，線形相補性問題 ([1] 参照) の特殊形となっている．したがって，線形相補性問題を解く内点法を使い，上記の問題を解くことができる．

ここでは，問題 (5) を解く内点法として，パス追跡法を解説する．問題 (5) の 1 番目と 2 番目の等式および不等式 $\boldsymbol{x}_2 > \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{x}_3 > \boldsymbol{0}$ をみたす点を実行可能内点と呼ぶ．問題 (5) の実行可能内点の集合を

$$F^0 = \{(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) | \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{x}_2 > \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}_3 > \boldsymbol{0}\}$$

とする．この集合 F^0 は，線形計画問題 (1) の実行可能内点の集合と等しい．正のパラメータ $\mu > 0$ とベクトル $\boldsymbol{e} = (1, 1, \cdots, 1)^T$ に対し，問題

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{x}_3 = \mu\boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{x}_2 > \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}_3 > \boldsymbol{0} \end{array} \tag{6}$$

を考える．集合 F^0 が空でないならば，この問題の解は，ただ 1 つ存在し，解析的中心と呼ばれる．この解を $(\boldsymbol{x}_1(\mu), \boldsymbol{x}_2(\mu), \boldsymbol{x}_3(\mu))$ と表す．解析的中心の集合

$$P = \{(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) \in F^0 \mid \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{x}_3 = \mu\boldsymbol{e}, \mu > 0\}$$

は，F^0 内に滑らかなパスを形成し，中心パスと呼ばれる．問題 (6) に $\mu = 0$ を代入すると，すべての等式条件は問題 (5) と一致する．このことから推察されるように，パラメー

タ μ の値が 0 に近づくと，中心パス上の点 $(\boldsymbol{x}_1(\mu), \boldsymbol{x}_2(\mu), \boldsymbol{x}_3(\mu))$ は，問題 (5) の解に近づく．したがって，中心パスを μ が減少する方向に追跡し，十分小さな μ に対して，解析的中心 $(\boldsymbol{x}_1(\mu), \boldsymbol{x}_2(\mu), \boldsymbol{x}_3(\mu))$ の近似解を得ることにより，問題 (5) の近似解が得られる．以上が，パス追跡法の概略である．以下では，パス追跡法をさらに詳しく説明する．

パス上の点を正確に計算することは簡単にできないので，パス追跡法では，中心パスの近傍を定義し，その中に点列を生成する．パラメータ $\beta \in [0,1]$ に対して，中心パスの近傍

$$N(\beta) = \{(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) \in F^0 | \boldsymbol{X}_2 \boldsymbol{x}_3 \geq (1-\beta)\mu \boldsymbol{e}, \mu = \boldsymbol{x}_2^T \boldsymbol{x}_3 / n, \mu > 0\}$$

を定義する．定義から明らかなように，近傍 $N(\beta)$ は中心パス P を含み，$\beta = 0$ のとき中心パスと一致し，$\beta = 1$ のとき実行可能内点の集合 F^0 と一致する (演習問題)．F^0 が空でないとき，任意の $\beta \in (0,1)$ に対し，近傍 $N(\beta)$ 内の任意の点列 $\{(\boldsymbol{x}_1^k, \boldsymbol{x}_2^k, \boldsymbol{x}_3^k)\}$ が

$$(\boldsymbol{x}_2^k)^T \boldsymbol{x}_3^k \ \rightarrow \ 0 \text{ as } k \ \rightarrow \ \infty$$

をみたすならば，その点列の任意の集積点は問題 (1) の強相補解となることを示すことができる．したがって，このような点列を生成することにより，問題を解くことが可能となる．

ある $\beta \in (0,1)$ に対して，実行可能内点 $(\boldsymbol{x}_1^0, \boldsymbol{x}_2^0, \boldsymbol{x}_3^0) \in N(\beta)$ が既知であると仮定する．内点法では，この点を初期点とし，近傍 $N(\beta)$ 内に実行可能内点列 $\{(\boldsymbol{x}_1^k, \boldsymbol{x}_2^k, \boldsymbol{x}_3^k)\}$ を生成する．k 番目の内点 $(\boldsymbol{x}_1^k, \boldsymbol{x}_2^k, \boldsymbol{x}_3^k) \in N(\beta)$ が得られているものと仮定し，次の点 $(\boldsymbol{x}_1^{k+1}, \boldsymbol{x}_2^{k+1}, \boldsymbol{x}_3^{k+1})$ の求め方について解説する．

条件式 $\boldsymbol{X}_2 \boldsymbol{x}_3 = \mu \boldsymbol{e}$ を変形すると，$\mu = \boldsymbol{x}_2^T \boldsymbol{x}_3 / n$ が得られるので，$\mu_k = (\boldsymbol{x}_2^k)^T \boldsymbol{x}_3^k / n$ とすれば，点 $(\boldsymbol{x}_1^k, \boldsymbol{x}_2^k, \boldsymbol{x}_3^k)$ から近い解析的中心はパラメータ値が μ_k のときである．アルゴリズムでは，これより小さいパラメータ値に対し，解析的中心を求めようとする．そこで，$\gamma \in (0,1)$ をパラメータとして，$\mu = \gamma \mu_k$ のときの解析的中心を求めることを考える．解析的中心は，問題 (6) の解であるので，その中の等式制約からなる方程式系に対して，点 $(\boldsymbol{x}_1^k, \boldsymbol{x}_2^k, \boldsymbol{x}_3^k)$ において，ニュートン法を適用する．その結果求められるニュートン方向 $(\Delta \boldsymbol{x}_1, \Delta \boldsymbol{x}_2, \Delta \boldsymbol{x}_3)$ は，線形方程式系

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & -\boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X}_{3k} & \boldsymbol{X}_{2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \boldsymbol{x}_1 \\ \Delta \boldsymbol{x}_2 \\ \Delta \boldsymbol{x}_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{X}_{2k} \boldsymbol{x}_3^k - \mu \boldsymbol{e} \end{pmatrix} \tag{7}$$

の解である．ここで，$\boldsymbol{X}_{2k} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{x}_2^k)$，$\boldsymbol{X}_{3k} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{x}_3^k)$ である． この解を探索方向として，近傍 $N(\beta)$ から出ない最大ステップサイズ

$$\alpha^k = \max\{\alpha | (\boldsymbol{x}_1^k, \boldsymbol{x}_2^k, \boldsymbol{x}_3^k) + \alpha(\Delta \boldsymbol{x}_1, \Delta \boldsymbol{x}_2, \Delta \boldsymbol{x}_3) \in N(\beta)\} \tag{8}$$

を求め，次の点を

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1^{k+1} \\ \boldsymbol{x}_2^{k+1} \\ \boldsymbol{x}_3^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1^{k} \\ \boldsymbol{x}_2^{k} \\ \boldsymbol{x}_3^{k} \end{pmatrix} + \alpha^k \begin{pmatrix} \Delta\boldsymbol{x}_1 \\ \Delta\boldsymbol{x}_2 \\ \Delta\boldsymbol{x}_3 \end{pmatrix} \tag{9}$$

により計算する．以上の議論をまとめると，問題 (5) を解くパス追跡法は次のように表される．

アルゴリズム 1.3 自己双対問題 (5) のパス追跡法のアルゴリズムは，次のステップから成る．

ステップ 0: 定数 $\beta \in (0,1)$，$\gamma \in (0,1)$ を定める．$k = 0$ とし，初期点を $(\boldsymbol{x}_1^0, \boldsymbol{x}_2^0, \boldsymbol{x}_3^0) \in N(\beta)$ とする．

ステップ 1: $\mu = \gamma(\boldsymbol{x}_2^k)^T \boldsymbol{x}_3^k / n$ を計算し，方程式系 (7) の解 $(\Delta\boldsymbol{x}_1^k, \Delta\boldsymbol{x}_2^k, \Delta\boldsymbol{x}_3^k)$ を求める．

ステップ 2: (8) によりパラメータ α^k の値を定め，(9) により $(\boldsymbol{x}_1^{k+1}, \boldsymbol{x}_2^{k+1}, \boldsymbol{x}_3^{k+1}) \in N(\beta)$ を求める．$k \leftarrow k+1$ としてステップ 1 へ行く．

このアルゴリズムにおいて，二つのパラメータ (ステップ 2 の μ とステップ 3 の α^k) の求め方を変えることにより，さまざまなパス追跡法を構築することができる．線形計画問題の主双対内点法で提案されている方法が利用でき，たとえば，ショートステップ・パス追跡法 (Kojima, Mizuno, and Yoshise [4]，Monteiro and Adler [9])，ロングステップ・パス追跡法 (Kojima, Mizuno, and Yoshise [3])，プレディクタ・コレクタ法 (Mizuno, Todd, and Ye [8]) などが利用できる．また，パス追跡法以外に，主双対ポテンシャル減少法 (Kojima, Mizuno, and Yoshise [5]) なども自己双対線形計画問題に適用できる．

演習問題 1.4 近傍 $N(\beta)$ が中心パス P を含み，$\beta = 0$ のとき中心パスと一致し，$\beta = 1$ のとき実行可能内点の集合 F^0 と一致することを示せ．

1.5 標準形 LP を解くための自己双対 LP を使った内点法

標準形の線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{10}$$

を考える．ここで，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ は与えられたデータであり，適当な自然数 m と $n (m \leq n)$ に対して，$\boldsymbol{A}$ は $m \times n$ 行列，$\boldsymbol{b}$ は m 次元ベクトル，$\boldsymbol{c}$ は n 次元ベクトルである．また，

$\boldsymbol{x}$ は n 次元の変数ベクトルである．上で定義した標準形の問題を主問題とするとき，その双対問題は

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{z}\geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{11}$$

と表される．ここで，$\boldsymbol{y}$ は m 次元の変数ベクトル，$\boldsymbol{z}$ は n 次元のスラック変数ベクトルである．主問題と双対問題を一緒にした主双対線形計画問題は

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{x}\geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

あるいは

$$\begin{array}{lrrcl} \text{最小化} & -\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} & +\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} & & \\ \text{制約条件} & & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} & = & \boldsymbol{b} \\ & -\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} & & \geq & -\boldsymbol{c} \\ & & \boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0} & & \end{array}$$

となる．この問題の最適解を $(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*,\boldsymbol{z}^*)$ とすれば, $\boldsymbol{x}^*$ は主問題の最適解となり, $(\boldsymbol{y}^*,\boldsymbol{z}^*)$ は双対問題の最適解となる．この主双対問題は，明らかに自己双対問題となっている．したがって，この問題を内点法などで解くことに，主問題と双対問題を同時に解くことが可能である．しかし，一般に，この問題の初期内点を簡単に得ることはできないので，インフィージブル内点法を使う必要がある．以下では，初期実行可能内点が簡単に得られる自己双対問題を導入する．

標準形の線形計画問題 (10) とその双対問題 (11) に対して，Ye, Todd, and Mizuno [13] は，次の線形計画問題

$$\begin{array}{lrrrrrrcl} \text{最小化} & & & & h^0\theta & & & & \\ \text{制約条件} & & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} & -\boldsymbol{b}\tau & +\boldsymbol{b}^0\theta & & & = & \boldsymbol{0} \\ & -\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} & & +\boldsymbol{c}\tau & -\boldsymbol{c}^0\theta & -\boldsymbol{z} & & = & \boldsymbol{0} \\ & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} & -\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} & & -g^0\theta & & -\kappa & = & 0 \\ & -(\boldsymbol{b}^0)^T\boldsymbol{y} & +(\boldsymbol{c}^0)^T\boldsymbol{x} & +g^0\tau & & & & = & -h^0 \\ & & \boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0} & \tau\geq 0 & & \boldsymbol{z}\geq\boldsymbol{0} & \kappa\geq 0 & & \end{array} \tag{12}$$

を導入した．ここで，適当な初期点 $(\boldsymbol{y}^0,\boldsymbol{x}^0,\tau^0,\theta^0,\boldsymbol{z}^0,\kappa^0)$ に対して

$$\begin{array}{lcl} \boldsymbol{b}^0 & = & \boldsymbol{b}\tau^0-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0 \\ \boldsymbol{c}^0 & = & \boldsymbol{c}\tau^0-\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^0-\boldsymbol{z}^0 \\ g^0 & = & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}^0-\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^0-\kappa^0 \\ h^0 & = & (\boldsymbol{x}^0)^T\boldsymbol{z}^0+\tau^0\kappa^0 \end{array} \tag{13}$$

である．初期点は，条件 $(\boldsymbol{x}^0, \tau^0, \boldsymbol{z}^0, \kappa^0) > \boldsymbol{0}$ と $\theta^0 = 1$ をみたすとする．($\boldsymbol{y}^0$ の値については特に何も仮定しない．また，文献 [13] では，さらに $\tau^0 = 1$ と $\kappa^0 = 1$ も仮定している．) これらの条件から，初期点 $(\boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{x}^0, \tau^0, \theta^0, \boldsymbol{z}^0, \kappa^0)$ において，問題 (12) のはじめの 3 つの等式と不等式は明らかに成立し，4 番目の等式も

$$\begin{aligned}
&-(\boldsymbol{b}^0)^T\boldsymbol{y}^0 + (\boldsymbol{c}^0)^T\boldsymbol{x}^0 + g^0\tau^0 \\
&= -(\boldsymbol{b}\tau^0 - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0)^T\boldsymbol{y}^0 + (\boldsymbol{c}\tau^0 - \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^0 - \boldsymbol{z}^0)^T\boldsymbol{x}^0 + (\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}^0 - \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^0 - \kappa^0)\tau^0 \\
&= -(\boldsymbol{x}^0)^T\boldsymbol{z}^0 - \tau^0\kappa^0 \\
&= -h^0
\end{aligned}$$

により成立する．したがって，この初期点は線形計画問題 (12) の実行可能解である．

問題 (12) は，定理 1.1 により，自己双対線形計画問題となっている (演習問題)．(スラック変数ベクトル $\boldsymbol{z}$ と κ が導入されているが，それらを消去すれば，問題 (1) と同じ形が得られ，定理 1 の条件を満たしていることを簡単に確かめることができる．) したがって，次の結果が得られる．

系 1.5 自己双対問題 (12) は最適解を持ち，その最適値は 0 である．(すなわち，任意の最適解で $\theta = 0$ である．) 任意の最適解 $(\boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{x}^*, \tau^*, 0, \boldsymbol{z}^*, \kappa^*)$ は，相補性条件

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{z}^* &= \boldsymbol{0} \\
\tau^*\kappa^* &= 0
\end{aligned}$$

をみたす．ここで，$\boldsymbol{X}^* = \mathrm{diag}(\boldsymbol{x}^*)$ は対角行列を表す．また，強相補性条件

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{z}^* = \boldsymbol{0}, &\quad \boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{z}^* > \boldsymbol{0} \\
\tau^*\kappa^* = 0, &\quad \tau^* + \kappa^* > 0
\end{aligned}$$

をみたす最適解が存在する．

問題 (12) は，自己双対線形計画問題であり，明らかな初期の実行可能内点を持つので，前説で解説した内点法により強相補解を求めることができる．このとき，次の定理により標準形の主問題 (10) と双対問題 (11) を解くことができる．

定理 1.6 自己双対問題 (12) の強相補解を $(\boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{x}^*, \tau^*, 0, \boldsymbol{z}^*, \kappa^*)$ とする．このとき，$\tau^* > 0$ または $\kappa^* > 0$ である．もし，$\tau^* > 0$ ならば $\boldsymbol{x}^*/\tau^*$ と $(\boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{z}^*)/\tau^*$ は，それぞれ主問題 (10) と双対問題 (11) の最適解である．もし，$\kappa^* > 0$ ならば，主問題 (10) あるいは双対問題 (11) の少なくとも一方が実行不能である．

証明 まずはじめに，$\tau^* > 0$ とする．このとき，問題 (12) の制約式において，$\theta = 0$ を代入し，両辺を τ^* で除することにより，$\boldsymbol{x}^*/\tau^*$ と $(\boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{z}^*)/\tau^*$ は，主問題 (10) と双対問題 (11) の実行可能解である．そして，$\boldsymbol{x}^*/\tau^*$ と $\boldsymbol{z}^*/\tau^*$ が相補性条件をみたすので，最適解である．

つぎに，$\kappa^* > 0$ であるとする．このとき，相補性条件より，$\tau^* = 0$ である．制約条件と $\tau^* = 0$，$\theta^* = 0$ より，問題 (12) の等式制約から

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{0} \\ &-\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^* - \boldsymbol{z}^* = \boldsymbol{0} \\ &\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}^* - \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^* - \kappa^* = \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

が成立する．この 3 番目の式より，

$$\kappa^* = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}^* - \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^* > 0$$

である．したがって，$\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}^* > 0$ または $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^* < 0$ である．このとき，$\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}^* > 0$ ならば主問題 (10) が実行不能であり，$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^* < 0$ ならば双対問題 (11) が実行不能である．実際，もし主問題 (10) が実行可能ならば (実行可能解を $\bar{\boldsymbol{x}}$ とすれば)，$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^* + \boldsymbol{z}^* = \boldsymbol{0}$ から

$$\begin{aligned} 0 &= (\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b})^T\boldsymbol{y}^* \\ &= -(\boldsymbol{z}^*)^T\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}^* \end{aligned}$$

となるので，$\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}^* = -(\boldsymbol{z}^*)^T\bar{\boldsymbol{x}} \leq 0$ であり，双対問題 (11) が実行可能ならば (実行可能解を $(\bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{z}})$ とすれば)，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{0}$ から

$$\begin{aligned} 0 &= (\boldsymbol{A}^T\bar{\boldsymbol{y}} + \bar{\boldsymbol{z}} - \boldsymbol{c})^T\boldsymbol{x}^* \\ &= \bar{\boldsymbol{z}}^T\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^* \end{aligned}$$

となるので，$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^* = \bar{\boldsymbol{z}}^T\boldsymbol{x}^* \geq 0$ である． ▌

この定理により，問題 (12) を内点法で解き強相補解を得ることにより，問題 (10) と (11) を解くことができる．このとき，実行可能な初期内点を持つので，インフィージブル内点法を使う必要がなく，理論的な反復回数が $O(\sqrt{n}L)$ となる．また，人工問題のように，ビッグ M と呼ばれる大きな人工的な係数を使う必要がない．

なお，単体法により問題 (12) を解いても，一般に基底解が得られるだけで強相補解を得ることができないので，問題 (10) と (11) を解けるとは限らない．

演習問題 1.7 問題 (12) が自己双対問題となっていることを示せ．

参考文献

[1] R. W. Cottle, J.-S. Pang, and R. E. Stone, *The Linear Complementary Problem*, Academic Press, 1992, Boston.

[2] N. K. Karmarkar, A new polynomial-time algorithm for linear programming, *Combinatorica*, 4, 373–395, 1984.

[3] M. Kojima, S. Mizuno, and A. Yoshise, A Primal-Dual Interior-Point Algorithm for Linear Programming; in N. Megiddo ed., *Progress in Mathematical Programming*, Interior Point and Related Methods, Springer-Verlag, 29–47, 1989.

[4] M. Kojima, S. Mizuno, and A. Yoshise, A Polynomial-Time Algorithm for a Class of Linear Complementarity Problems; *Mathematical Programming* 44, 1–26, 1989.

[5] M. Kojima, S. Mizuno and A. Yoshise: An $O(\sqrt{n}L)$ Iteration Potential Reduction Algorithm for Linear Complementarity Problems; *Mathematical Programming* 50, 331–342, 1991.

[6] 水野眞治, 自己双対線形計画問題と内点法, 第 12 回 RAMP シンポジウム予稿集,2000.

[7] S. Mizuno and M. J. Todd, On two homogeneous self-dual systems for linear programming and its extensions, *Mathematical Programming* 89, 517–534, 2001.

[8] S. Mizuno, M. J. Todd, and Y. Ye, On Adaptive-Step Primal-Dual Interior-Point Algorithms for Linear Programming; *Mathematics of Operations Research* 18, 964–981, 1993.

[9] R. D. C. Monteiro and I. Adler, Interior path following primal-dual algorithms: Part I: Linear programming, *Mathematical Programming*, 44, 27–41, 1989.

[10] Yu. E. Nesterov, M. J. Todd and Y. Ye, Infeasible-start primal-dual methods and infeasibility detectors for nonlinear programming problems, *Mathematical Programming*, 84, 227–267, (1999).

[11] X. Xu, P.-F. Hung, and Y. Ye, A simplified homogeneous and self-dual linear programming algorithm and its implementation, *Annals of Operations Research*, 62, 151–171, 1996.

[12] X. Xu and Y. Ye, A generalized homogeneous and self-dual linear programming algorithm, *Operations Research Letters*, 17, 181–190, 1995.

[13] Y. Ye, M. J. Todd, and S. Mizuno, An $O(\sqrt{n}L)$-iteration homogeneous and self-dual linear programming algorithm, *Mathematics of Operations Research*, 19,

53–67, 1994.