

学習・研究用テキスト 線形計画法 (3A)

シンプレックス法の巡回とその回避

水野 眞治

東京工業大学 大学院社会理工学研究科 経営工学専攻

http://www.me.titech.ac.jp/~mizu_lab/text/

2013年2月23日

概要

線形計画問題を解くシンプレックス法には、基底に入る変数と基底から出る変数を選ぶときに様々なピボット規則がある。よく知られた規則に、最小係数規則、最良改善規則、最小添え字規則などがある。最小係数規則あるいは最良改善規則などを使う場合には、同じ基底解の列を生成し続ける巡回に陥る危険性がある。ここでは、最小係数規則を使った場合に巡回が起こる線形計画問題の例を示すと同時に、最小添え字規則を使えば巡回が起きないことを示す。巡回がないので、シンプレックス法が有限回の反復で必ず終了する。また、最適基底解と最適な辞書の違いについて解説すると同時に、シンプレックス法の有限反復の結果を使って、線形計画問題に最適解が存在するならば、最適な辞書が存在することを示す。

目次

1	シンプレックス法の巡回とその回避	2
1.1	シンプレックス法	2
1.2	シンプレックス法のピボット規則と巡回	3
1.3	シンプレックス法が巡回する線形計画問題の例	5
1.4	最小添え字規則による巡回の回避	7
1.5	最適基底解と最適な辞書	10
1.6	演習問題の略解	11

1 シンプレックス法の巡回とその回避

1.1 シンプレックス法

標準形の線形計画問題

$$\begin{aligned} & \text{最小化} && \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ & \text{制約条件} && \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & && \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{1}$$

を解くシンプレックス法について、初期の実行可能基底解が得られているとして、簡単に説明する。シンプレックス法を開始するために、標準形の線形計画問題の実行可能基底解における辞書

$$\begin{aligned} & \text{最小化} && \omega = \omega'_0 + c'_{i_{m+1}} x_{i_{m+1}} + \cdots + c'_{i_n} x_{i_n} \\ & \text{制約条件} && x_{i_1} = b'_{i_1} - a'_{i_1 i_{m+1}} x_{i_{m+1}} - \cdots - a'_{i_1 i_n} x_{i_n} \\ & && \vdots \\ & && x_{i_m} = b'_{i_m} - a'_{i_m i_{m+1}} x_{i_{m+1}} - \cdots - a'_{i_m i_n} x_{i_n} \\ & && (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{2}$$

が得られているものとする。基底変数の添え字の集合を $I_B = \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ とし、非基底変数の添え字の集合を $I_N = \{i_{m+1}, \dots, i_n\}$ とする。基底変数の集合あるいは I_B を基底、非基底変数の集合あるいは I_N を非基底と呼ぶ。基底解が実行可能なので、 $b'_i \geq 0$ ($i \in I_B$) が成り立っている。上の辞書の目的関数において、非基底変数の係数 c'_i ($i \in I_N$) がすべて0以上ならば、最適基底解が得られる。この場合には、主シンプレックス法を終える。さもなければ、 $c'_i < 0$ となる $i \in I_N$ が存在するので、そのような添え字 $s \in I_N$ を定める。 $c'_s < 0$ であるので、変数 x_s を0から増加させれば、目的関数が減少する。実際、上の辞書から、他の非基底変数の値を0のまま、 x_s のみを変化させると、目的関数値は、

$$\omega'_0 + c'_s x_s$$

と変化し、基底変数は、等式制約 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ をみたすために、

$$\begin{aligned} x_{i_1} &= b'_{i_1} - a'_{i_1 s} x_s \\ &\vdots \\ x_{i_m} &= b'_{i_m} - a'_{i_m s} x_s \end{aligned}$$

と変化する。このように変化させた解が実行可能であるためには、上の基底変数の値が0以上でなければならない。したがって、変数 x_s の値を

$$x_s^* = \sup \{x_s \mid x_i = b'_i - a'_{i s} x_s \geq 0, \forall i \in I_B\}$$

以下とする必要がある．もしすべての $i \in I_B$ に対して $a'_{is} \leq 0$ であるならば，この $x_s^* = \infty$ となる．すなわち，任意の $x_s \geq 0$ に対して，実行可能解が得られることになり，目的関数値 $\omega'_0 + c'_s x_s$ に下界が存在しないので，問題が非有界であることが判明する．この場合には，主シンプレックス法を終える．さもなければ， $a'_{is} > 0$ となる $i \in I_B$ が存在し， x_s^* の値が有限である． $x_s = x_s^*$ において 0 となる基底変数が存在するので，それを x_r とする，あるいは，同じことであるが

$$\min \left\{ \frac{b'_i}{a'_{is}} \mid a'_{is} > 0, i \in I_B \right\}$$

を達成する添え字 $i \in I_B$ を r とする．このようにして定めた変数 x_r を基底から出すことにより，次に得られる基底解も実行可能となる．

以上のことから，現在の基底変数の集合から， x_s を基底に入れ， x_r を基底から出すことにより，新しい基底変数の集合を定め，辞書を更新する．主シンプレックス法では，最適基底解が求まるか，問題が非有界であることが判明するまで，上記の操作を繰り返す．

アルゴリズム 1.1 初期実行可能基底解が既知の場合の主シンプレックス法は，次のようなステップから成る．

ステップ0 初期実行可能基底解に対して，辞書 (2) を求める．

ステップ1 辞書の目的関数において，非基底変数の係数 c'_i ($i \in I_N$) がすべて 0 以上ならば，最適基底解が得られているので，終了する．

ステップ2 非基底変数の係数 c'_i ($i \in I_N$) が負となる変数の添え字 $s \in I_N$ ($c'_s < 0$) を 1 つ選ぶ．(このときに選ばれる変数 x_s を基底に入る変数と呼ぶ．)

ステップ3 すべての $i \in I_B$ に対して $a'_{is} \leq 0$ であるならば，問題が非有界であるので，終了する．

ステップ4 $a'_{is} > 0$ である添え字 $i \in I_B$ のなかで， $\frac{b'_i}{a'_{is}}$ を最小とする添え字 $r \in I_B$ を定める．(このときに選ばれる変数 x_r を基底から出る変数と呼ぶ．)

ステップ5 x_s を基底に入れ， x_r を基底から出し，辞書を更新し，ステップ 1 へ戻る．

1.2 シンプレックス法のピボット規則と巡回

前節で説明したシンプレックス法のアルゴリズム 1.1 では，次のようなことに注意すべきである．

基底に入る変数の選択の問題: ステップ 2 において，係数が負となる非基底変数が複数

あるとき、基底に入る変数をどのように選ぶか。

基底から出る変数の選択の問題: ステップ 4 において、比 $\frac{b'_i}{a'_{is}}$ を最小とする添え字が複数あるとき、基底から出る変数をどのように選ぶか。

基底解が更新されない場合の問題: 基底と辞書を更新しても、基底解が変化しないことがある。

巡回の問題: 同じ辞書が 2 回以上現れることがある。

シンプレックス法において、基底に入る変数と出る変数の決め方をピボット規則という。ピボット規則には、様々なものが提案されており、例えば次のような規則がある。

最小係数規則 (Dantzig の規則): 辞書 (2) の目的関数における非基底変数の係数が負である変数の中で、その係数が最も小さな (絶対値が最も大きな) 変数を選ぶ。

最良改善規則 (最小目的関数規則): 更新した基底解における目的関数値の改善が最大、すなわち目的関数値が最小となるような変数を選ぶ。

最小添え字規則: 辞書 (2) の目的関数における非基底変数の係数が負である変数の中で、添え字が最も小さな変数を選ぶ。

ランダム規則: 辞書 (2) の目的関数における非基底変数の係数が負である変数の中で、ランダムに一つ選ぶ。

最小係数規則あるいは最良改善規則において、最小あるいは最大となる変数が 2 つ以上存在する場合には、その中で最小添え字の変数を選ぶ、あるいはランダムに選ぶ方法などがある。使う規則により、シンプレックス法の反復回数が大きく変わることがあるが、問題によって差が激しいため、一般にどの規則が最も良いかについて、言及することは難しい。

基底から出る変数を選ぶときに、候補となる変数が複数ある場合には、その中で最小添え字の変数あるいはランダムに選ぶ方法などがある。

一般に、基底変数の集合 (基底) が異なれば、基底解が異なり、目的関数値も異なると思われるかもしれない。しかし、基底が異なっても同じ基底解が得られることもある。このような基底解は、退化しているといわれる。線形計画問題は、退化した実行可能基底解が一つでも存在するとき、退化しているといわれる。退化した基底解は、基底変数の中に値がゼロとなるものが存在する。退化には、主問題の基底解の退化と双対問題の基底解の退化の 2 種類がある。そして、同じ基底において、主問題と双対問題の基底解がとも退化していることもありうる。主シンプレックス法では、主問題の基底解が退化しているときに、基底を更新しても基底解が変わらないことがある。

シンプレックス法で次々に基底を更新しているときに、基底解が変わらないと、何回か繰り返した後に、同じ基底が再度現れることがある。基底に出入りする変数を同じ規則で選んでいる場合には、一旦同じ基底が現れると、そのあとは同じ基底の列を何度も生成することになる。この現象をシンプレックス法の巡回 (cycling) という。巡回に入ると、シンプレックス法により同じ基底解の列が生成され続けるので、問題を解くことに失敗する。

1.3 シンプレックス法が巡回する線形計画問題の例

最小係数規則を使ったシンプレックス法が巡回する線形計画問題の例を示す。なお、ここで示す例は、Chvátal [2] に掲載されている例を使っている。

次の線形計画問題の辞書

$$\begin{aligned}
 \text{最小化} \quad & \omega = -10x_1 + 57x_2 + 9x_3 + 24x_4 \\
 \text{制約条件} \quad & x_5 = -0.5x_1 + 5.5x_2 + 2.5x_3 - 9x_4 \\
 & x_6 = -0.5x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 - x_4 \\
 & x_7 = 1 - x_1 \\
 & (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)^T \geq \mathbf{0}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

から始める。このとき、基底変数が x_5, x_6, x_7 、非基底変数が x_1, x_2, x_3, x_4 、基底解が $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$ 、目的関数値が 0 である。

シンプレックス法で辞書を更新するが、基底に入る変数と出る変数は次の最小係数規則により選ぶとする。

- (1) 基底に入る変数を選択するときに、目的関数の非基底変数の係数が負の中で最小となる変数を選ぶ。なお、最小となる変数が複数ある場合には、その中で添え字が最も小さな変数を選ぶ。
- (2) 基底から出る変数を選択するときに、候補となる変数が複数ある場合には、その中で添え字が最も小さな変数を選ぶ。

この規則を辞書 (3) に適用すると、基底に入る変数が x_1 、基底から出る変数が x_5 となり、更新した辞書は

$$\begin{aligned}
 \text{最小化} \quad & \omega = -53x_2 - 41x_3 + 204x_4 + 20x_5 \\
 \text{制約条件} \quad & x_1 = 11x_2 + 5x_3 - 18x_4 - 2x_5 \\
 & x_6 = -4x_2 - 2x_3 + 8x_4 + x_5 \\
 & x_7 = 1 - 11x_2 - 5x_3 + 18x_4 + 2x_5 \\
 & (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)^T \geq \mathbf{0}.
 \end{aligned}$$

となる。この辞書において、基底に入る変数が x_2 、基底から出る変数が x_6 となり、更新した辞書は

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & \omega = -14.5x_3 + 98x_4 + 6.75x_5 + 13.25x_6 \\ \text{制約条件} \quad & x_1 = -0.5x_3 + 4x_4 + 0.75x_5 - 2.75x_6 \\ & x_2 = -0.5x_3 + 2x_4 + 0.25x_5 - 0.25x_6 \\ & x_7 = 1 + 0.5x_3 - 4x_4 - 0.75x_5 + 2.75x_6 \\ & (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)^T \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

となる。この辞書において、基底に入る変数が x_3 、基底から出る変数が x_1 となり、更新した辞書は

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & \omega = 29x_1 - 18x_4 - 15x_5 + 93x_6 \\ \text{制約条件} \quad & x_3 = -2x_1 + 8x_4 + 1.5x_5 - 5.5x_6 \\ & x_2 = x_1 - 2x_4 - 0.5x_5 + 2.5x_6 \\ & x_7 = 1 - x_1 \\ & (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)^T \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

となる。この辞書において、基底に入る変数が x_4 、基底から出る変数が x_2 となり、更新した辞書は

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & \omega = 20x_1 + 9x_2 - 10.5x_5 + 70.5x_6 \\ \text{制約条件} \quad & x_3 = 2x_1 - 4x_2 - 0.5x_5 + 4.5x_6 \\ & x_4 = 0.5x_1 - 0.5x_2 - 0.25x_5 + 1.25x_6 \\ & x_7 = 1 - x_1 \\ & (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)^T \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

となる。この辞書において、基底に入る変数が x_5 、基底から出る変数が x_3 となり、更新した辞書は

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & \omega = -22x_1 + 93x_2 + 21x_3 - 24x_6 \\ \text{制約条件} \quad & x_5 = 4x_1 - 8x_2 - 2x_3 + 9x_6 \\ & x_4 = -0.5x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 - x_6 \\ & x_7 = 1 - x_1 \\ & (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)^T \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{4}$$

となる。この辞書において、基底に入る変数が x_6 、基底から出る変数が x_4 となり、更新した辞書は

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & \omega = -10x_1 + 57x_2 + 9x_3 + 24x_4 \\ \text{制約条件} \quad & x_5 = -0.5x_1 + 5.5x_2 + 2.5x_3 - 9x_4 \\ & x_6 = -0.5x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 - x_4 \\ & x_7 = 1 - x_1 \\ & (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)^T \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

となる。これは、はじめの辞書 (3) と一致している。したがって、シンプレックス法を続けても、上と同じ辞書の列を生成し続けることになる。これが、巡回である。

巡回の間、基底変数の集合 (基底) は変化しているが、基底解 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$ と目的関数値 0 は、変化していない。また、この巡回の間に x_7 以外の変数 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ は、基底に入ったり出たりするが、それらの基底解での値はすべてゼロである。

1.4 最小添え字規則による巡回の回避

シンプレックス法で基底に入る変数を最小係数規則、あるいは最良改善規則により決める場合には、問題により巡回に陥る可能性がある。巡回を回避する規則として、Bland [1] が提案した最小添え字規則がある。それは、1.2 節でも説明したが、より詳しく述べると次のようになる。

最小添え字規則 (Bland [1] の規則)

- (1) 基底に入る変数を選択するときに、目的関数の非基底変数の係数で負となる変数が複数ある場合には、その中で添え字が最も小さな変数を選ぶ。
- (2) 基底から出る変数を選択するときに、候補となる (比 $\frac{b'_i}{a_{is}}$ を最小とする) 変数が複数ある場合には、その中で添え字が最も小さな変数を選ぶ。

定理 1.2 線形計画問題を解くシンプレックス法において、各反復で最小添え字規則により基底に入る変数と基底から出る変数を選べば、巡回が起こらない。したがって、このシンプレックス法を使えば、有限回の反復で、最適解を求めるか、最適解が存在しないことを判定できる。

証明 線形計画問題に最小添え字規則を使ったシンプレックス法を実行しているとき、巡回が起こったと仮定し、矛盾を導く。巡回が起こったので、ある基底から退化した基底を次々と生成し、 l 回後に同じ基底が現れたとする。このときの基底変数の添え字の集合を順に $I_{B^0}, I_{B^1}, \dots, I_{B^l} = I_{B^0}$ とする。この巡回において、変数の中には、基底に入ったり出たりする変数、基底に入ったままの変数、非基底に入ったままの変数がある。巡回の間、基底解は変化しないので、基底に出入りする変数の値はすべて 0 となっている。巡回の間に基底に出入りする変数のなかで、添え字の一番大きな変数を x_p とする。

この巡回において、 x_p が基底から出る直前の基底変数の添え字の集合を

$$I_{B'} = \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$$

とし、非基底変数の添え字の集合を

$$I_{N'} = \{i_{m+1}, i_{m+2}, \dots, i_n\}$$

とし、そのときの辞書を

$$\begin{aligned}
 \text{最小化} \quad & \omega = \omega'_0 + c'_{i_{m+1}} x_{i_{m+1}} + \cdots + c'_q x_q + \cdots + c'_{i_n} x_{i_n} \\
 \text{制約条件} \quad & x_{i_1} = b'_{i_1} - a'_{i_1 i_{m+1}} x_{i_{m+1}} - \cdots - a'_{i_1 q} x_q - \cdots - a'_{i_1 i_n} x_{i_n} \\
 & \vdots \\
 & x_p = b'_p - a'_{p i_{m+1}} x_{i_{m+1}} - \cdots - a'_{p q} x_q - \cdots - a'_{p i_n} x_{i_n} \\
 & \vdots \\
 & x_{i_m} = b'_{i_m} - a'_{i_m i_{m+1}} x_{i_{m+1}} - \cdots - a'_{i_m q} x_q - \cdots - a'_{i_m i_n} x_{i_n} \\
 & (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \geq \mathbf{0}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

とする。ここで、 x_q は次に基底に入る変数であり、 $c'_q < 0$ となっている。

x_p が基底に入る直前の基底変数の添え字の集合を

$$I_{B^*} = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$$

とし、非基底変数の添え字の集合を

$$I_{N^*} = \{j_{m+1}, j_{m+2}, \dots, j_n\}$$

とし、そのときの辞書を

$$\begin{aligned}
 \text{最小化} \quad & \omega = \omega_0^* + c_{j_{m+1}}^* x_{j_{m+1}} + \cdots + c_p^* x_p + \cdots + c_{j_n}^* x_{j_n} \\
 \text{制約条件} \quad & x_{j_1} = b_{j_1}^* - a_{j_1 j_{m+1}}^* x_{j_{m+1}} - \cdots - a_{j_1 p}^* x_p - \cdots - a_{j_1 j_n}^* x_{j_n} \\
 & \vdots \\
 & x_{j_m} = b_{j_m}^* - a_{j_m j_{m+1}}^* x_{j_{m+1}} - \cdots - a_{j_m p}^* x_p - \cdots - a_{j_m j_n}^* x_{j_n} \\
 & (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \geq \mathbf{0}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

とする。

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を満たす任意の \mathbf{x} に対して、二つの辞書 (5) と (6) の目的関数が等しく、目的関数値である定数項も等しいので

$$c'_{i_{m+1}} x_{i_{m+1}} + \cdots + c'_q x_q + \cdots + c'_{i_n} x_{i_n} = c_{j_{m+1}}^* x_{j_{m+1}} + \cdots + c_p^* x_p + \cdots + c_{j_n}^* x_{j_n}$$

あるいは同じ式であるが

$$\sum_{i \in I_{N'}} c'_i x_i = \sum_{i \in I_{N^*}} c_i^* x_i \tag{7}$$

が成立する。今、辞書 (5) における基底解から、非基底変数の中で x_q のみを $\epsilon > 0$ だけ変化させた解を

$$\begin{aligned}
 \bar{x}_q &= \epsilon \\
 \bar{x}_i &= b'_i - a'_{iq} \epsilon \quad (i \in I_{B'}) \\
 \bar{x}_i &= 0 \quad (i \in I_{N'}, i \neq q)
 \end{aligned} \tag{8}$$

とすれば, $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T$ は, $\mathbf{A}\bar{x} = \mathbf{b}$ を満たす. この解 \bar{x} を上の等式 (7) に代入すると

$$\sum_{i \in I_{N'}} c'_i \bar{x}_i = \sum_{i \in I_{N^*}} c_i^* \bar{x}_i$$

となる. ここで, $\bar{x}_i = 0$ ($i \in I_{N'}, i \neq q$), $\bar{x}_q = \epsilon$ であるから

$$c'_q \epsilon = \sum_{i \in I_{N^*} \cap (I_{B'} \cup \{q\})} c_i^* \bar{x}_i \quad (9)$$

となる. 以下では, この等式が矛盾することを示す.

ここで, 式 (9) の右辺の和にある添え字 $i \in I_{N^*} \cap (I_{B'} \cup \{q\})$ をもつ変数 x_i は, 明らかにこの巡回で基底に出入りするから, その添え字 i が p 以下である. 辞書 (5) において, 基底から出る変数として最小添え字規則により x_p が選ばれたということは

$$\begin{aligned} -a'_{iq} &\geq 0 \text{ if } b'_i = 0 \text{ (} i \in I_{B'}, i < p \text{)} \\ -a'_{pq} &< 0 \text{ and } b'_p = 0 \end{aligned}$$

が成立する. したがって, (8) より, 小さな $\epsilon > 0$ に対して

$$\begin{aligned} \bar{x}_q &> 0 \\ \bar{x}_i &\geq 0 \text{ (} i \in I_{B'}, i < p \text{)} \\ \bar{x}_p &< 0 \end{aligned}$$

となる. また, 辞書 (6) において, 基底に入る変数として最小添え字規則により x_p が選ばれたということは

$$\begin{aligned} c_i^* &\geq 0 \text{ (} i \in I_{N^*}, i < p \text{)} \\ c_p^* &< 0 \end{aligned}$$

が成立する. 以上のことから, 等式 (9) の右辺の各項 $c_i^* \bar{x}_i$ の値はゼロ以上である. 一方, $c'_q < 0$ であるから, 等式 (9) の左辺の値が負である. したがって, 等式 (9) は成立しない. ■

ここでは, Bland のピボット規則を使ったシンプレックス法が巡回を起こさず, 有限回で終了することを示した. 実際の計算では, 巡回に陥ることはまれであり, 巡回を起こさないようなピボット規則を特に採用する必要はない. そういう意味で, 巡回を起こさないピボット規則がこれ以外にもあるが, 特に説明する必要性を感じていない. しかし, 巡回を決して起こさないピボット規則があるということは, 理論的には大切なことである. 次節の議論でも, この結果を使う.

演習問題 1.3 1.3 節で述べた例において, 最小添え字規則により基底に入る変数と出る変数を選べば, 巡回しないことを示せ.

1.5 最適基底解と最適な辞書

線形計画問題において、制約条件を満たす実行可能解の中で、目的関数を最小にするものを最適解という。標準形の線形計画問題に最適解が存在すれば、最適基底解が存在することはよく知られている (たとえば、水野 [3] 参照)。辞書 (2) において、基底変数の値 $x_i = b'_i$ ($i \in I_B$) がすべて 0 以上ならば、それは実行可能解である。さらに、目的関数における非基底変数の係数 c'_i ($i \in I_N$) がすべて非負ならば、その実行可能解は最適基底解となる。このような条件を満たす辞書を最適な辞書という。したがって、シンプレックス法で最適な辞書を見つければ、最適基底解が得られる。しかし、その逆が常に成り立つとは限らない。つまり、最適な基底解において、最適な辞書が得られるとは限らない。次の例では、最適解において、辞書が最適となっていない場合があることを示している。

例 1.4 次の線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \omega = -2x_1 - x_2 \\ \text{制約条件} & x_1 \leq 1 \\ & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & (x_1, x_2)^T \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

を例として扱う。この問題の最適解は、 $(x_1, x_2) = (1, 0)$ である。不等式制約に上から順にスラック変数 x_3, x_4 を導入し、それらを基底変数とすれば、辞書

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \omega = -2x_1 - x_2 \\ \text{制約条件} & x_3 = 1 - x_1 \\ & x_4 = 1 - x_1 - x_2 \\ & (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

が得られる。この辞書から、 x_1 を基底に入れ、 x_3 を基底から出すと、新しい辞書

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \omega = -2 - x_2 + 2x_3 \\ \text{制約条件} & x_1 = 1 - x_3 \\ & x_4 = -x_2 + x_3 \\ & (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

が得られる。このとき、基底解は、 $(x_1, x_2) = (1, 0)$ であり、最適解となっている。しかし、目的関数において、非基底変数 x_2 の係数が負となっているので、これは最適な辞書で

はない。ちなみに、上の辞書から、 x_2 を基底に入れ、 x_4 を基底から出すと、新しい辞書

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & \omega = -2 + x_3 + x_4 \\ \text{制約条件} \quad & x_1 = 1 - x_3 \\ & x_2 = x_3 - x_4 \\ & (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

が得られる。これは、目的関数における非基底変数の係数がすべて非負なので、最適な辞書となっている。

上の例でみたように、最適基底解において、必ずしも最適な辞書が得られるとは限らない。これは、最適基底解が2つ以上の基底から得られるために、起きたことである。主問題が退化していなければ、シンプレックス法が有限回で終了することから、必ず最適な辞書を見つけることができ、最適な辞書が存在することもいえる。

また、主問題が退化している場合にも、前節で解説した最小添え字規則を使うことにより、シンプレックス法が有限回で必ず終了することから、最適解が存在すれば最適な辞書が存在することもわかる。したがって、次の結果が得られる。

定理 1.5 標準形の線形計画問題に最適解が存在すれば、最適な辞書が存在する。

補足：著者は、シンプレックス法の有限回の収束を使わないで、上の定理を直接証明する方法を知りません。

1.6 演習問題の略解

1.6.1 演習問題 1.3 の略解

1.3 節で述べた例において、最小添え字規則により基底に入る変数と出る変数を選ぶとき、辞書(4)までは、最小係数規則と同じように更新される。辞書(4)を再掲すると

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & \omega = -22x_1 + 93x_2 + 21x_3 - 24x_6 \\ \text{制約条件} \quad & x_5 = 4x_1 - 8x_2 - 2x_3 + 9x_6 \\ & x_4 = -0.5x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 - x_6 \\ & x_7 = 1 - x_1 \\ & (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)^T \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

である。この辞書において最小添え字規則を使うと、基底に入る変数が x_1 、基底から出る変数が x_4 となり、更新した辞書は

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & \omega = 27x_2 - x_3 + 44x_4 + 20x_6 \\ \text{制約条件} \quad & x_5 = 4x_2 + 2x_3 - 8x_4 + x_6 \\ & x_1 = 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 2x_6 \\ & x_7 = 1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 + 2x_6 \\ & (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)^T \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

となる。この辞書において最小添え字規則を使うと、基底に入る変数が x_3 、基底から出る変数が x_7 となり、更新した辞書は

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \omega = -1 + 30x_2 + 42x_4 + 18x_6 + x_7 \\ \text{制約条件} & x_5 = 2 - 2x_2 - 4x_4 + 5x_6 - 2x_7 \\ & x_1 = 1 - x_7 \\ & x_3 = 1 - 3x_2 + 2x_4 + 2x_6 - x_7 \\ & (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)^T \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

となる。このときの基底解は $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (1, 0, 1, 0, 2, 0, 0)$ であり、退化もしていない。また、その前の基底解 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$ と異なっているので、巡回に陥っていない。このとき、目的関数値も 0 から -1 に減少している。なお、このときの基底解は、目的関数における非基底変数の係数がすべて非負なので、最適解となっている。

参考文献

- [1] Bland, R. G.: New finite pivoting rules for the simplex method, *Mathematics of Operations Research*, Vol. 2 (1977) 103-107.
- [2] Chvátal, V.: *Linear Programming*, W. H. Freeman and Company (1983).
- [3] 水野眞治：学習用テキスト 線形計画法 (3) シンプレックス法, Web 上のテキスト, http://www.me.titech.ac.jp/~mizu_lab/text/ (2010)