学習用テキスト 非線形計画法 (3)

非線形計画問題

水野 眞治

東京工業大学 大学院社会理工学研究科 経営工学専攻

http://www.me.titech.ac.jp/~mizu_lab/text/

2013 年 2 月 9 日

概要

ここでは，非線形計画問題を扱う．まず，制約のない 1 変数関数の最小化，多変数関数の最小化について，最適解であるための必要条件と十分条件を述べ，実際に最小解を求めるためのアルゴリズムについても紹介する．その後，等式制約のみの非線形計画問題，不等式制約のみの非線形計画問題，一般の非線形計画問題の最適条件等について説明する．

目次

1 非線形計画問題 (Nonlinear Programming Problem) 1
- 1.1 1 変数関数の最小化 1
- 1.2 1 変数関数最小化問題に対するニュートン法 (Newton's Method) 4
- 1.3 多変数関数の最小化 5
- 1.4 最急降下法 8
- 1.5 多変数関数最小化問題に対するニュートン法 (Newton's Method) 10
- 1.6 等式制約のみの非線形計画問題 11
- 1.7 不等式制約のみの非線形計画問題 11
- 1.8 一般の非線形計画問題 15
- 1.9 演習問題の略解 16

1 非線形計画問題 (Nonlinear Programming Problem)

1.1 1 変数関数の最小化

1 変数関数の最小化とは，関数 $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ が与えられたとき，任意の実数 $x \in \mathcal{R}$ に対して

$$f(x^*) \leq f(x)$$

を満たす $x^* \in \mathcal{R}$ を求める問題である．この 1 変数最小化問題を

$$\min_{x} \ f(x) \tag{1}$$

と表す．また，解 x^* を関数 f(あるいは最小化問題) の**大域的最小解**または**大域的最適解** (global optimal solution) という．

ある $\epsilon > 0$ が存在し，$|x - x^*| < \epsilon$ をみたす任意の x に対して

$$f(x^*) \le f(x)$$

を満たすとき，この x^* を関数 f(最小化問題) の**局所的最小解**または**局所的最適解** (local optimal solution) という．

関数 f は

$$x, y \in \mathcal{R}, \alpha \in [0,1] \Rightarrow f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y).$$

を満たすとき，凸関数と呼ばれる．関数 f が凸関数ならば，任意の局所的最適解は大域的最適解となる．

f が連続微分可能で，その導関数を f' とするとき，x^* が問題 (1) の局所的最適解ならば

$$f'(x^*) = 0 \tag{2}$$

が成立する．この条件 (2) を, x^* が局所的最適解であるための **1 次の必要条件** (first-order necessary condition) という．f が凸関数ならば，条件 (2) は，x^* が局所的最適解であるための必要十分条件となる．

f が 2 回連続微分可能で，その 2 階の導関数を f'' とするとき，x^* が問題 (1) の局所的最適解ならば

$$f'(x^*) = 0, \ f''(x^*) \ge 0 \tag{3}$$

が成立する．この条件 (3) を，x^* が局所的最適解であるための **2 次の必要条件** (second-order necessary condition) という．逆に，x^* において

$$f'(x^*) = 0, \ f''(x^*) > 0 \tag{4}$$

が成立するならば，x^* は問題 (1) の局所的最適解となる．この条件 (4) を，x^* が局所的最適解であるための **2 次の十分条件** (second-order sufficient condition) という．

例 1.1　1 変数関数 f を任意の $x \in \mathcal{R}$ に対して

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 32$$

とする．x が局所的最小解ならば

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x-2)(x+1) = 0$$

となるので，$x = -1, 0, 2$ がその候補である．このとき

$$f''(x) = 36x^2 - 24x - 24$$

より

$$f''(-1) = 36,\ f''(0) = -24,\ f''(2) = 72$$

となるので，$x = -1, 2$ が 2 次の十分条件を満たすので，局所的最小解である．この関数のグラフは，図 1 のようにあらわすことができる．これをみると，$x = 2$ が大域的最小解となっており，$x = -1$ は大域的最小解ではない．

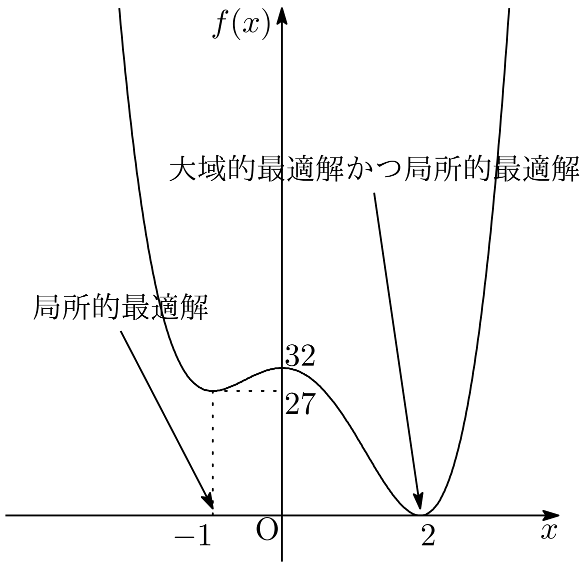

図 1　大域的最適解と局所的最適解

演習問題 1.2　次の関数の局所的最小解であるための 1 次の必要条件をみたす解 x をすべて求め，それらの解が，2 次の必要条件および 2 次の十分条件をみたすかどうか調べよ．

(1)　$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$

(2)　$f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 12x - 4$

1.2 1変数関数最小化問題に対するニュートン法 (Newton's Method)

関数 $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ が2回連続微分可能なとき，次の最小化問題

$$\min_{x} \; f(x)$$

を解くためのニュートン法について解説する．

ニュートン法は，初期点 x^0 より数列 (点列)$\{x^k | k = 0, 1, \cdots\}$ を生成する反復法である．この数列の第 k 項を点 x^k と呼ぶこともある．第 k 反復で得られた点を x^k とするとき，関数 f を x^k において 2 次近似した関数を

$$g(x) = f(x^k) + f'(x^k)(x - x^k) + \frac{1}{2} f''(x^k)(x - x^k)^2$$

とする．2 階の微係数 $f''(x^k)$ が正であると仮定すれば，関数 g は凸 2 次関数となり，その最小値は

$$g'(x) = f'(x^k) + f''(x^k)(x - x^k) = 0$$

をみたす x^* において達成される．この解は

$$x^* = x^k - \frac{f'(x^k)}{f''(x^k)}$$

と表される．この x^* を次の点 x^{k+1} として，上記の操作を繰り返すことにより，点列 $\{x^k\}$ を生成するのが，ニュートン法である．

例 1.3 1 変数関数 f を任意の $x \in \mathcal{R}$ に対して

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 32$$

とし，初期点を $x^0 = 4$ とする．このとき，$f(4) = 352$，$f'(4) = 480$，$f''(4) = 456$ であり，関数 f を x^0 において 2 次近似した関数は

$$g(x) = 352 + 480(x - 4) + 228(x - 4)^2$$

となり，$g'(x^*) = 0$ の解は

$$x^* = 4 - \frac{480}{456} = 2\frac{54}{57}$$

となる．

演習問題 1.4 次の関数

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$$

に初期点 $x^0 = 3$ からニュートン法を適用したとき，1 反復後の点を計算せよ．

1.3 多変数関数の最小化

多変数関数の最小化とは，関数 $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ が与えられたとき，任意の点 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n$ に対し

$$f(\boldsymbol{x}^*) \leq f(\boldsymbol{x})$$

となる $\boldsymbol{x}^* \in \mathcal{R}^n$ を求める問題である．この最小化問題を

$$\min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x})$$

と表す．この解 $\boldsymbol{x}^*$ を関数 f(最小化問題) の**大域的最小解 (最適解)** という．

ある $\epsilon > 0$ が存在し，$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*\| < \epsilon$ をみたす任意の $\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n$ に対して

$$f(\boldsymbol{x}^*) \leq f(\boldsymbol{x})$$

をみたすとき，この点 $\boldsymbol{x}^*$ を関数 f(最小化問題) の**局所的最小解 (最適解)** という．

関数 f は

$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{R}^n, \alpha \in [0,1] \Rightarrow f(\alpha\boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y}) \leq \alpha f(\boldsymbol{x}) + (1-\alpha) f(\boldsymbol{y})$$

を満たすとき，凸関数と呼ばれる．関数 f が凸関数ならば，任意の局所的最適解は大域的最適解となる．

関数 f が連続微分可能であるとする．点 $\boldsymbol{x}$ における偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ の値を第 i 要素とする n 次元ベクトル

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

を f の**勾配ベクトル** (gradient vector) という．

定理 1.5 点 $\boldsymbol{x}^*$ が関数 f の局所的最適解ならば

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = \mathbf{0} \tag{5}$$

が成立する．

証明 点 $\boldsymbol{x}^*$ が関数 f の局所的最適解であるが，$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) \neq \mathbf{0}$ であると仮定し，矛盾を導く．このとき

$$\boldsymbol{d} = -\frac{\nabla f(\boldsymbol{x}^*)}{\|\nabla f(\boldsymbol{x}^*)\|}$$

とすれば，$\nabla f(\boldsymbol{x}^*)^T \boldsymbol{d} < 0$ である．平均値の定理より，任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある $\theta \in [0,1]$ が存在し

$$f(\boldsymbol{x}^* + \epsilon \boldsymbol{d}) = f(\boldsymbol{x}^*) + \epsilon \nabla f(\boldsymbol{x}^* + \theta\epsilon \boldsymbol{d})^T \boldsymbol{d}$$

が成立する．∇f の連続性より，十分小さな $\epsilon > 0$ に対し $\nabla f(\boldsymbol{x}^* + \theta\epsilon\boldsymbol{d})^T \boldsymbol{d} < 0$ となる．このとき，$f(\boldsymbol{x}^* + \epsilon\boldsymbol{d}) < f(\boldsymbol{x}^*)$ となり，点 $\boldsymbol{x}^*$ が関数 f の局所的最適解であることに矛盾する． ▌

上の定理の式 (5) を $\boldsymbol{x}^*$ が関数 f の局所的最適解であるための **1 次の必要条件**という．関数 f が凸関数ならば，必要十分条件となる．一般に，$\nabla f(\boldsymbol{x}) = 0$ をみたす点 $\boldsymbol{x}$ を関数 f の**停留点** (stationary point) という．

関数 f が 2 回連続微分可能であるとする．点 $\boldsymbol{x}$ における 2 階の偏導関数 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ の値を i 行 j 列成分とする $n \times n$ 行列

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2 \partial x_n} \\ & & \vdots & \\ \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

を**ヘッセ行列** (Hessian matrix) という．

定理 1.6 点 $\boldsymbol{x}^*$ が関数 f の局所的最適解ならば

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0} \text{ かつ } \nabla^2 f(\boldsymbol{x}^*) \text{ が半正定値行列} \tag{6}$$

が成立する．ここで，半正定値行列 $\boldsymbol{M}$ とは，任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n$ に対して，$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{x} \geq 0$ となる行列のことである．

証明 点 $\boldsymbol{x}^*$ が関数 f の局所的最適解であるとき，定理 1.5 より $\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}$ であるので，$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^*)$ が半正定値でないと仮定し，矛盾を導く．このとき，大きさ 1 のあるベクトル $\boldsymbol{d}$ に対して

$$\boldsymbol{d}^T \nabla^2 f(\boldsymbol{x}^*) \boldsymbol{d} < 0$$

となる．関数 $\nabla^2 f$ の連続性より，十分小さな $\bar{\alpha} > 0$ に対し

$$\boldsymbol{d}^T \nabla^2 f(\boldsymbol{x}^* + \alpha \boldsymbol{d}) \boldsymbol{d} < 0, \ \forall \alpha \in [0, \bar{\alpha}]$$

となる．一方，平均値の定理より，任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある $\theta \in [0,1]$ が存在し

$$f(\boldsymbol{x}^* + \epsilon \boldsymbol{d}) = f(\boldsymbol{x}^*) + \epsilon \nabla f(\boldsymbol{x}^*)^T \boldsymbol{d} + \frac{1}{2}\epsilon^2 \boldsymbol{d}^T \nabla^2 f(\boldsymbol{x}^* + \theta\epsilon\boldsymbol{d}) \boldsymbol{d}$$

が成立する．ここで，右辺の第 2 項は 0 であり，$\epsilon \leq \bar{\alpha}$ ならば第 3 項が負となるので，$f(\boldsymbol{x}^* + \epsilon \boldsymbol{d}) < f(\boldsymbol{x}^*)$ が成立し，点 $\boldsymbol{x}^*$ が関数 f の局所的最適解であることに矛盾する． ▌

上の定理にある条件 (6) を $\boldsymbol{x}^*$ が関数 f の局所的最適解であるための **2 次の必要条件**という．

定理 1.7 関数 f が 2 回連続微分可能であり，条件

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0} \text{ かつ } \nabla^2 f(\boldsymbol{x}^*) \text{ が正定値行列} \tag{7}$$

が成り立つならば，$\boldsymbol{x}^*$ は関数 f の局所的最適解である．ここで，正定値行列 $\boldsymbol{M}$ とは，任意のゼロベクトルでない $\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n$ に対して，$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{x} > 0$ となる行列のことである．

証明 点 $\boldsymbol{x}^*$ で条件 (7) が成り立つとする．このとき，関数 $\nabla^2 f$ の連続性より，ある $\bar{\alpha} > 0$ が存在し，大きさ 1 の任意のベクトル $\boldsymbol{d}$ に対し

$$\boldsymbol{d}^T \nabla^2 f(\boldsymbol{x}^* + \alpha \boldsymbol{d}) \boldsymbol{d} > 0, \ \forall \alpha \in [0, \bar{\alpha}]$$

が成立する．平均値の定理より，任意の $\epsilon \in (0, \bar{\alpha}]$ に対して，ある $\theta \in [0, 1]$ が存在し

$$f(\boldsymbol{x}^* + \epsilon \boldsymbol{d}) = f(\boldsymbol{x}^*) + \epsilon \nabla f(\boldsymbol{x}^*)^T \boldsymbol{d} + \frac{1}{2} \epsilon^2 \boldsymbol{d}^T \nabla^2 f(\boldsymbol{x}^* + \theta \epsilon \boldsymbol{d}) \boldsymbol{d} > f(\boldsymbol{x}^*)$$

が成立する．これより，$\boldsymbol{x}^*$ は，関数 f の局所的最適解である． ▌

上の定理の条件 (7) を $\boldsymbol{x}^*$ が関数 f の局所的最適解であるための **2 次の十分条件**という．

例 1.8 2 変数関数 f を任意の $(x_1, x_2)^T \in \mathcal{R}^2$ に対して

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1 x_2 + 2x_2^2 - 4x_1 + 2x_2 + 3$$

とする．このとき，

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 - 4 \\ -2x_1 + 4x_2 + 2 \end{pmatrix}$$

かつ

$$\nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

となる．このとき，最小解であるための一次の必要条件は

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 &= 4 \\ -2x_1 + 4x_2 &= -2 \end{aligned}$$

となるので，$(x_1, x_2) = (3, 1)$ が得られる．この点 (この場合，任意の点) において，ヘッセ行列 $\nabla^2 f(x_1, x_2)$ が正定値となるので，2 次の必要条件と十分条件を満たす．したがって，$(x_1, x_2) = (3, 1)$ は f の局所的最適解であり，そのときに最小値 -2 をとる．この場合，f が凸関数であるので，これは大域的最適解でもある．

演習問題 1.9 次の 2 変数関数

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1 + 2x_2$$

の局所的最小解であるための 1 次の必要条件をみたす点 $(x_1, x_2)^T$ をすべて求め，それらの点が，2 次の必要条件および 2 次の十分条件をみたすかどうか調べよ．

1.4 最急降下法

関数 $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ が 2 回連続微分可能なとき，次の最小化問題

$$\min_{\boldsymbol{x}} \ f(\boldsymbol{x})$$

を考える．この問題に対する最急降下法は，反復解法であり，初期点 $\boldsymbol{x}^0$ より点列 $\{\boldsymbol{x}^k | k = 0, 1, \cdots\}$ を生成する．

第 k 反復で点 $\boldsymbol{x}^k$ が求められているとし，次の点の求め方を説明する．勾配ベクトル $\nabla f(\boldsymbol{x}^k)$ は，この点における関数 f の増加方向であるから，その逆方向へ進むことにより，関数 f の値を減少させることができる．ステップサイズを α として，次の点を

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k - \alpha \nabla f(\boldsymbol{x}^k)$$

とする．ステップサイズ α は，問題

$$\min_{\alpha} \ f(\boldsymbol{x}^k - \alpha \nabla f(\boldsymbol{x}^k))$$

を解くことにより求めることができる．上記の問題は，1 変数 α に関する最小化問題であるので，**直線探索** (1 変数関数の最小化，1 次元探索，line search) により近似解を求めることができる．

アルゴリズム 1.10 最急降下法のアルゴリズムは，次のステップからなる．

ステップ 0 初期点 $\boldsymbol{x}^0$ を選び，十分小さな正の数 ϵ を定め，$k = 0$ とする．
ステップ 1 $\|\nabla f(\boldsymbol{x}^k)\| \leq \epsilon$ ならばストップし，$\boldsymbol{x}^k$ を近似解とする．さもなければ問題

$$\min_{\alpha} \ f(\boldsymbol{x}^k - \alpha \nabla f(\boldsymbol{x}^k))$$

の (近似) 解 α^* を求める．

ステップ 2 $\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k - \alpha^* \nabla f(\boldsymbol{x}^k)$ とし，k を 1 増加しステップ 1 へ戻る．

上の最急降下法のアルゴリズムにおいて，$\epsilon = 0$ とすれば，生成される点列が有界ならば，その点列の集積点 $\boldsymbol{x}^*$ は関数 f の停留点となる ($\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = 0$ となる) ことが知られている．

例 1.11 2 変数関数を

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_1 + 2x_2 + 3$$

とし，初期点を $(x_1, x_2) = (0, 0)$ とするとき，最急降下法による次の点 (x_1^1, x_2^1) を求めてみる．勾配ベクトルは，

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 - 4 \\ -2x_1 + 4x_2 + 2 \end{pmatrix}$$

より

$$\nabla f(0, 0) = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

となる．ステップサイズを α とすれば

$$\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\alpha \\ -2\alpha \end{pmatrix}$$

となる．これより

$$f(x_1^1, x_2^1) = 16\alpha^2 + 16\alpha^2 + 8\alpha^2 - 16\alpha - 4\alpha + 3 = 40\alpha^2 - 20\alpha + 3$$

となる．この関数 $f(x_1^1, x_2^1)$ は，$\alpha = 1/4$ のときに最小値 1/2 をとる．$\alpha = 1/4$ であるから，

$$\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

が得られる．

演習問題 1.12 $(x_1^1, x_2^1) = (1, -\frac{1}{2})$ から，関数 $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_1 + 2x_2 + 3$ に最急降下法を適用したときの，次の点 (x_1^2, x_2^2) を計算せよ．

1.5 多変数関数最小化問題に対するニュートン法 (Newton's Method)

写像 $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ が 2 回連続微分可能なとき，次の最小化問題

$$\min_{\boldsymbol{x}} \ f(\boldsymbol{x})$$

を考える．関数 f を点 $\boldsymbol{x}^k$ において 2 次近似した関数を

$$g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}^k) + \nabla f(\boldsymbol{x}^k)^T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^k) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^k)^T \nabla^2 f(\boldsymbol{x}^k)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^k)$$

とする．ヘッセ行列 $\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^k)$ が正定値であると仮定すれば，g は凸 2 次関数となり，その最小値は

$$\nabla g(\boldsymbol{x}) = \nabla f(\boldsymbol{x}^k) + \nabla^2 f(\boldsymbol{x}^k)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^k) = 0$$

をみたす点 $\hat{\boldsymbol{x}}$ において達成される．この解は

$$\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^k = -\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^k)^{-1} \nabla f(\boldsymbol{x}^k)$$

と表される．$\boldsymbol{d} = \hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^k = -\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^k)^{-1} \nabla f(\boldsymbol{x}^k)$ を探索方向とし，ステップ幅を α とし，問題

$$\min_{\alpha} \ f(\boldsymbol{x}^k + \alpha \boldsymbol{d})$$

を解き，その解 α^* に対して，次の点 $\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k + \alpha^* \boldsymbol{d}$ を求める．

アルゴリズム 1.13　ニュートン法のアルゴリズムは，次のステップからなる．

ステップ 0　初期点 $\boldsymbol{x}^0$ を選び，十分小さな正の数 $\epsilon > 0$ を定め，$k = 0$ とする．

ステップ 1　$\|\nabla f(\boldsymbol{x}^k)\| \leq \epsilon$ ならばストップし，$\boldsymbol{x}^k$ を近似解とする．さもなければ，

$$\boldsymbol{d} = -\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^k)^{-1} \nabla f(\boldsymbol{x}^k)$$

を計算し，問題

$$\min_{\alpha} \ f(\boldsymbol{x}^k + \alpha \boldsymbol{d})$$

の (近似) 解 α^* を求める．

ステップ 2　$\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k + \alpha^* \boldsymbol{d}$ とし，k を 1 増加してステップ 1 へ戻る．

最小解 $\boldsymbol{x}^*$ においてヘッセ行列 $\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^*)$ が正定値であり，初期点 $\boldsymbol{x}^0$ が $\boldsymbol{x}^*$ に十分近いならば，ニュートン法で生成される点列は $\boldsymbol{x}^*$ に速く収束する (局所的に 2 次収束する) ことが知られている．

演習問題 1.14 原点 $(0,0)$ を初期点とするとき，関数 $f(x_1,x_2)=x_1^2-2x_1x_2+2x_2^2-4x_1+2x_2+3$ にニュートン法を適用し，1 反復後の点を計算せよ．

1.6 等式制約のみの非線形計画問題

等式制約のみの非線形計画問題は，変数ベクトル $\boldsymbol{x}\in\mathcal{R}^n$ と関数 $f:\mathcal{R}^n\to\mathcal{R}$, $h_j:\mathcal{R}^n\to\mathcal{R}$ $(j=1,2,\cdots,l)$ に対し

$$\begin{array}{lll}(\mathrm{NLP0}) & \text{最小化} & f(\boldsymbol{x}) \\ & \text{制約条件} & h_j(\boldsymbol{x})=0,\ j=1,2,\cdots,l\end{array}$$

と表される．ここで, 目的関数 f とすべての h_j が 2 回連続微分可能であるとする．制約条件をすべてみたす点 $\boldsymbol{x}$ を**実行可能解**といい，すべての実行可能解の集合 $S=\{\boldsymbol{x}|h_j(\boldsymbol{x})=0,j=1,2,\cdots,l\}$ を**実行可能領域**という．

任意の実行可能解 $\boldsymbol{x}\in S$ に対して，

$$f(\boldsymbol{x}^*)\le f(\boldsymbol{x})$$

となる $\boldsymbol{x}^*\in S$ を非線形計画問題 (NLP0) の**大域的最小解 (最適解)** という．ある $\epsilon>0$ が存在し，$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\|<\epsilon$ をみたす任意の実行可能解 $\boldsymbol{x}\in S$ に対して，

$$f(\boldsymbol{x}^*)\le f(\boldsymbol{x})$$

をみたす $\boldsymbol{x}^*\in S$ を非線形計画問題 (NLP0) の**局所的最小解 (最適解)** という．

点 $\boldsymbol{x}^*$ が非線形計画問題 (NLP0) の局所的最適解であり，点 $\boldsymbol{x}^*$ における勾配ベクトル $\nabla h_j(\boldsymbol{x}^*)$ $(j=1,2,\cdots,l)$ が 1 次独立であるならば，ある $\boldsymbol{v}^*=(v_1^*,v_2^*,\cdots,v_l^*)\in\mathcal{R}^m$ が存在し

$$\begin{array}{l}\nabla f(\boldsymbol{x}^*)+\sum_{j=1}^m v_j^*\nabla h_j(\boldsymbol{x}^*)=\boldsymbol{0} \\ h_j(\boldsymbol{x}^*)=0,\ j=1,2,\cdots,l\end{array}$$

が成立する．これを最適性の 1 次の必要条件という．

1.7 不等式制約のみの非線形計画問題

不等式制約のみの非線形計画問題は，変数ベクトル $\boldsymbol{x}\in\mathcal{R}^n$ と関数 $f:\mathcal{R}^n\to\mathcal{R}$, $g_i:\mathcal{R}^n\to\mathcal{R}$ $(i=1,2,\cdots,m)$ に対し

$$\begin{array}{lll}(\mathrm{NLP1}) & \text{最小化} & f(\boldsymbol{x}) \\ & \text{制約条件} & g_i(\boldsymbol{x})\le 0, i=1,2,\cdots,m\end{array}$$

と表される．ここで，目的関数 f とすべての g_i は 2 回連続微分可能であるとする．制約条件をすべてみたす点 $\boldsymbol{x}$ を**実行可能解**といい，すべての実行可能解の集合 $S = \{\boldsymbol{x} | g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, i = 1, 2, \cdots, m\}$ を**実行可能領域**という．

任意の実行可能解 $\boldsymbol{x} \in S$ に対して，

$$f(\boldsymbol{x}^*) \leq f(\boldsymbol{x})$$

となる $\boldsymbol{x}^* \in S$ を非線形計画問題 (NLP1) の**大域的最小解 (最適解)** という．ある $\epsilon > 0$ が存在し，$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*\| < \epsilon$ をみたす任意の実行可能解 $\boldsymbol{x} \in S$ に対して，

$$f(\boldsymbol{x}^*) \leq f(\boldsymbol{x})$$

をみたす $\boldsymbol{x}^* \in S$ を非線形計画問題 (NLP1) の**局所的最小解 (最適解)** という．

実行可能領域 S が凸集合 (すべての関数 g_i が凸関数) で目的関数 f が凸関数ならば，任意の局所的最小解が大域的最小解となる．このとき，問題 (NLP1) を**凸計画問題**という．

例 1.15 非線形計画問題の例として，

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1 - 2)^2 - x_2 \\ \text{制約条件} & g_1(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 1 \leq 0 \\ & g_2(x_1, x_2) = x_1 - 1 \leq 0 \\ & g_3(x_1, x_2) = -x_2 \leq 0 \end{array}$$

を扱う．この問題の最適解は，$\boldsymbol{x}^* = (1, 1)^T$ であり，そのときの最小値は $-1/2$ である．

最適解で等号が成立している制約式 ($g_1(\boldsymbol{x}^*) = 0$ と $g_2(\boldsymbol{x}^*) = 0$) を**有効制約**という．図 2 には，この問題の実行可能領域と目的関数の値が $-1/2$ となる曲線を表している．これを見るとわかるように，最適解 $\boldsymbol{x}^*$ において目的関数の勾配ベクトル $\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = (-1, -1)^T$ が有効制約の勾配ベクトル $\nabla g_1(\boldsymbol{x}^*) = (0, 2)^T$ と $\nabla g_2(\boldsymbol{x}^*) = (1, 0)^T$ の非負結合で釣り合っている．すなわち，ある $u_1^* \geq 0$ と $u_2^* \geq 0$ に対し，

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) + u_1^* \nabla g_1(\boldsymbol{x}^*) + u_2^* \nabla g_2(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}$$

が成立する．実際，$u_1^* = 1/2$，$u_2^* = 1$ とすれば，上の式が成立する．上記の条件と制約条件を一緒にすると，

$$\begin{array}{l} \nabla f(\boldsymbol{x}^*) + u_1^* \nabla g_1(\boldsymbol{x}^*) + u_2^* \nabla g_2(\boldsymbol{x}^*) + u_3^* \nabla g_3(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0} \\ \left.\begin{array}{l} g_i(\boldsymbol{x}^*) \leq 0 \\ u_i^* \geq 0 \\ u_i^* g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0 \end{array}\right\} i = 1, 2, 3 \end{array}$$

と表すことができる．ここで，$g_3(\boldsymbol{x}^*) < 0$ より，$u_3^* = 0$ である．

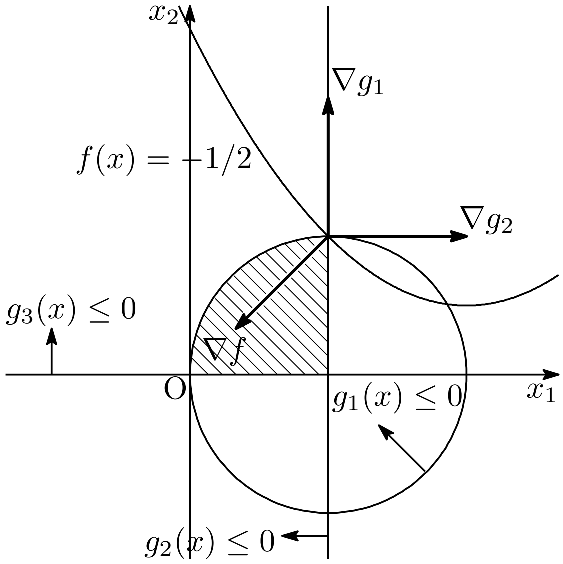

図 2　最適解での目的関数と制約関数の勾配ベクトルの関係

一般には，点 $\boldsymbol{x}^*$ が非線形計画問題 (NLP1) の局所的最適解であり，点 $\boldsymbol{x}^*$ における有効制約の勾配ベクトルが 1 次独立であるならば，ある $\boldsymbol{u}^* = (u_1^*, u_2^*, \cdots, u_m^*) \in \mathcal{R}^m$ が存在し

$$\begin{array}{l} \nabla f(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{i=1}^m u_i^* \nabla g_i(\boldsymbol{x}^*) = \mathbf{0} \\ \left.\begin{array}{l} g_i(\boldsymbol{x}^*) \le 0 \\ u_i^* \ge 0 \\ u_i^* g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0 \end{array}\right\} i = 1, 2, \cdots, m \end{array} \tag{8}$$

が成立する．これを最適性の 1 次の必要条件といい，**カルーシュ・キューン・タッカー条件** (Karush-Kuhn-Tucker 条件，KKT 条件) またはキューン・タッカー条件 (KT 条件) ともいう．

例 1.16　次の例

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & f(\boldsymbol{x}) = x_1 + x_2 \\ \text{制約条件} & g_1(\boldsymbol{x}) = -x_1^3 + x_2 \le 0 \\ & g_2(\boldsymbol{x}) = -x_2 \le 0 \end{array}$$

では，$\boldsymbol{x}^* = (x_1, x_2) = (0, 0)$ が最適解であり，最適値が 0 である．

図 3 には，この問題の実行可能領域と目的関数の値が 0 となる直線を表している．最適解において，制約 $g_1(\boldsymbol{x}) \le 0$ と $g_2(\boldsymbol{x}) \le 0$ は，共に等号が成立しており，有効制約である．図 3 を見るとわかるように，勾配ベクトル $\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = (1, 1)^T$，$\nabla g_1(\boldsymbol{x}^*) = (0, 1)^T$，

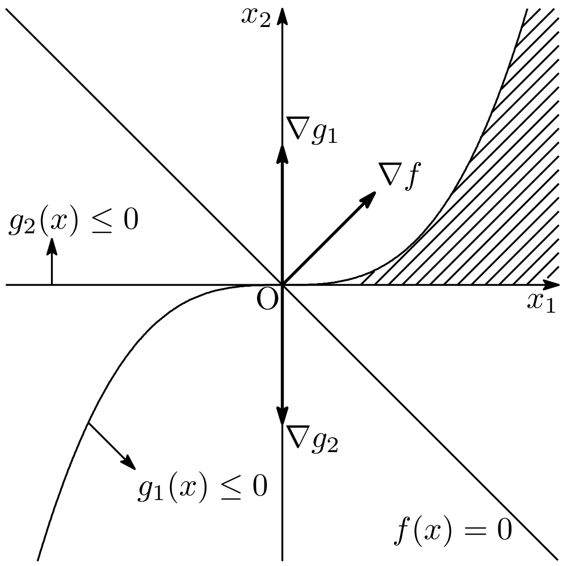

図 3　最適解での有効制約の勾配ベクトルが一次独立でない例

$\nabla g_2(\boldsymbol{x}^*) = (0, -1)^T$ に対して KKT 条件の第 1 式

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) + u_1^* \nabla g_1(\boldsymbol{x}^*) + u_2^* \nabla g_2(\boldsymbol{x}^*) = \mathbf{0}$$

を満たす $u_1^* \geq 0$ と $u_2^* \geq 0$ が存在しない．その理由は，この最適解において，有効制約の勾配ベクトル $\nabla g_1(\boldsymbol{x}^*) = (0, 1)^T$，$\nabla g_2(\boldsymbol{x}^*) = (0, -1)^T$ が 1 次独立となっていないからである．

非線形計画問題 (NLP1) に対し，**ラグランジュ乗数** $u_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ を導入して，**ラグランジュ関数** (Lagrangian) を

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{m} u_i g_i(\boldsymbol{x})$$

と定義する．ただし，ラグランジュ乗数の中に負の値をとるものがるときは，$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = -\infty$ とする．このとき，KKT 条件は，

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*) = \nabla f(\boldsymbol{x}^*) + \textstyle\sum_{i=1}^{m} u_i^* \nabla g_i(\boldsymbol{x}^*) = \mathbf{0}$$
$$\left.\begin{array}{l} g_i(\boldsymbol{x}^*) \leq 0 \\ u_i^* \geq 0 \\ u_i^* g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0 \end{array}\right\} i = 1, 2, \cdots, m$$

と表わされる．

最適解 $\boldsymbol{x}^*$ における有効制約の集合を

$$I(\boldsymbol{x}^*) = \{i | g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0\}$$

とし，すべての有効制約の勾配ベクトルと直交するベクトルの集合を

$$M = \{\boldsymbol{y} \in \mathcal{R}^n | \nabla g_i(\boldsymbol{x}^*)^T \boldsymbol{y} = 0, i \in I(\boldsymbol{x}^*)\}$$

とする．非線形計画問題 (NLP1) の局所的最適解 $\boldsymbol{x}^*$ において有効制約の勾配ベクトルが 1 次独立で，KKT 条件をみたすラグランジュ乗数を $\boldsymbol{u}^*$ とすれば，

$$\boldsymbol{y}^T \nabla^2_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*) \boldsymbol{y} \geq 0 \text{ for } \forall \boldsymbol{y} \in M$$

が成立する．これと KKT 条件を合わせて，最適性の 2 次の必要条件という．

逆に，KKT 条件をみたす $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*)$ に対して，

$$M' = \left\{ \boldsymbol{y} \in \mathcal{R}^n | \begin{array}{l} \nabla g_i(\boldsymbol{x}^*)^T \boldsymbol{y} = 0, i \in I(\boldsymbol{x}^*) \text{ and } u_i^* > 0, \\ \nabla g_i(\boldsymbol{x}^*)^T \boldsymbol{y} \geq 0, i \in I(\boldsymbol{x}^*) \text{ and } u_i^* = 0 \end{array} \right\}$$

と定義するとき

$$\boldsymbol{y}^T \nabla^2_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*) \boldsymbol{y} > 0 \text{ for } \forall \boldsymbol{y} \in M' \text{ and } \boldsymbol{y} \neq 0$$

が成り立つならば，$\boldsymbol{x}^*$ は (NLP1) の局所的最適解となる．この条件と KKT 条件を合わせて最適性の 2 次の十分条件という．

演習問題 1.17　2 次計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} + \frac{1}{2} \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{Q} \boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

の KKT 条件を求めよ．

1.8　一般の非線形計画問題

等式制約と不等式制約を持つ一般的な非線形計画問題は

$$\begin{array}{lll} \text{(NLP2)} & \text{最小化} & f(\boldsymbol{x}) \\ & \text{制約条件} & g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0,\ i = 1, \cdots, m \\ & & h_j(\boldsymbol{x}) = 0,\ j = 1, \cdots, l \end{array}$$

と表すことができる．関数 f とすべての g_i，h_j が 2 回連続微分可能であるとする．問題 (NLP1) と同様に，実行可能解，大域的最適解，局所的最適解などを定義できる．

問題 (NLP2) のラグランジュ関数を

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{l} v_j h_j(\boldsymbol{x})$$

と定義する．このとき，点 $\boldsymbol{x}^*$ が非線形計画問題 (NLP2) の最適解であり，有効制約の勾配ベクトル $\nabla g_i(\boldsymbol{x}^*)$ $(i \in I(\boldsymbol{x}^*))$, $\nabla h_j(\boldsymbol{x}^*)$ が 1 次独立ならば，ある $\boldsymbol{u}^*$ と $\boldsymbol{v}^*$ に対し次の条件 (KKT 条件)

$$\begin{array}{l} \nabla_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{v}^*) = \boldsymbol{0} \\ \left.\begin{array}{l} g_i(\boldsymbol{x}^*) \le 0 \\ u_i^* \ge 0 \\ u_i^* g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0 \end{array}\right\} i = 1, \cdots, m \\ h_j(\boldsymbol{x}^*) = 0,\ j = 1, \cdots, l \end{array} \tag{9}$$

が成立する．問題 (NLP2) の 2 次の必要条件と十分条件も (NLP1) と同様に求めることができる．

演習問題 1.18　2 次計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} + \frac{1}{2} \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{Q} \boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}_1 \\ & \boldsymbol{A}_2 \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_2 \end{array}$$

の KKT 条件を求めよ．

1.9　演習問題の略解

1.9.1　演習問題 1.2 の略解

(1) 関数

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$$

の局所的最小解であるための 1 次の必要条件は

$$f'(x) = 6(x-1)(x-2) = 0$$

となる．したがって，$x = 1, 2$ が 1 次の必要条件をみたす．このとき

$$f''(x) = 12x - 18$$

となる．$f''(1) = -6 < 0$ より，$x = 1$ は 2 次の必要条件も 2 次の十分条件も満たさない．したがって，$x = 1$ は，関数 f の局所的最小解ではない．また，$f''(2) = 6 > 0$ より，$x = 2$ は 2 次の必要条件も 2 次の十分条件も満たす．したがって，$x = 2$ は，f の局所的最小解である．

(2) 関数

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 12x - 4$$

の局所的最小解であるための 1 次の必要条件は

$$f'(x) = 12(x+1)^2(x-1) = 0$$

となる．したがって，$x = -1, 1$ が 1 次の必要条件をみたす．このとき

$$f''(x) = 36x^2 + 24x - 12$$

となる．$f''(-1) = 0$ より，$x = 1$ は 2 次の必要条件を満たすが，2 次の十分条件を満たさない．この条件だけでは，$x = 1$ が局所的最小解であるかどうかわからないが，関数 f のグラフを書くと，局所的最適解ではないことがわかる．また，$f''(1) = 48 > 0$ より，$x = 1$ は 2 次の必要条件も 2 次の十分条件も満たす．したがって，$x = 1$ は，関数 f の局所的最小解である．

1.9.2　演習問題 1.4 の略解

関数 f を任意の $x \in \mathcal{R}$ に対して

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$$

とし，ニュートン法の初期点を $x^0 = 3$ とする．このとき，$f(3) = 6$，$f'(3) = 12$，$f''(3) = 18$ であるので，関数 f を $x^0 = 3$ において 2 次近似した関数は

$$g(x) = 6 + 12(x-3) + 9(x-3)^2$$

となり，$g'(x^1) = 0$ の解は

$$x^1 = 3 - \frac{12}{18} = 2\frac{1}{3}$$

となる．この x^1 がニュートン法で 1 反復後に計算される点である．

1.9.3　演習問題 1.9 の略解

2 変数関数

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1 + 2x_2$$

の勾配ベクトルは

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 + 2x_2 + 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2 \end{pmatrix}$$

となり，ヘッセ行列は

$$\nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 6x_1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

となる．このとき，最小解であるための一次の必要条件は

$$\begin{aligned} 3x_1^2 + 2x_2 + 1 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2 = 0 \end{aligned}$$

となるので，$(x_1, x_2) = (-1/3, -2/3), (1, -2)$ が得られる．点 $(x_1, x_2) = (-1/3, -2/3)$ において，ヘッセ行列

$$\nabla^2 f(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

は，半正定値ではない．したがって，この点 $(x_1, x_2) = (-1/3, -2/3)$ は，2 次の必要条件と 2 次の十分条件を満たさず，f の局所的最適解ではない．また，点 $(x_1, x_2) = (1, -2)$ において，ヘッセ行列

$$\nabla^2 f(1, -2) = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

は，正定値となる．したがって，この点 $(x_1, x_2) = (1, -2)$ は，2 次の必要条件と 2 次の十分条件を満たし，f の局所的最適解である．

1.9.4　演習問題 1.12 の略解

関数

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_1 + 2x_2 + 3$$

に点 $\boldsymbol{x}^1 = (x_1^1, x_2^1) = (1, -1/2)$ から最急降下法を適用したときの，次の点 $\boldsymbol{x}^2 = (x_1^2, x_2^2)$ を求める．勾配ベクトルは，

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 - 4 \\ -2x_1 + 4x_2 + 2 \end{pmatrix}$$

より

$$\nabla f(1, -\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

となる．ステップサイズを α とすれば

$$\boldsymbol{x}^2 = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha \\ -\frac{1}{2} + 2\alpha \end{pmatrix}$$

となる．これより

$$f(x_1^2, x_2^2) = 5\alpha^2 - 5\alpha + \frac{1}{2}$$

となる．この関数 $f(x_1^2, x_2^2)$ は，$\alpha = 1/2$ のときに最小値 $-3/4$ をとる．$\alpha = 1/2$ であるから，

$$\boldsymbol{x}^2 = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

が得られる．

1.9.5　演習問題 1.14 の略解

関数

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_1 + 2x_2 + 3$$

に点 $\boldsymbol{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) = (0, 0)$ からニュートン法を適用したときの，次の点 $\boldsymbol{x}^1 = (x_1^1, x_2^1)$ を求める．勾配ベクトルは

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 - 4 \\ -2x_1 + 4x_2 + 2 \end{pmatrix}$$

となり，ヘッセ行列は

$$\nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

となる．これより

$$\nabla f(0, 0) = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

かつ

$$\nabla^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

となる．したがって，ニュートン方向は

$$\boldsymbol{d} = -\nabla^2 f(0, 0)^{-1} \nabla f(0, 0) = -\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる．このとき，

$$f(\boldsymbol{x}^0 + \alpha \boldsymbol{d}) = f(3\alpha, \alpha) = 5\alpha^2 - 10\alpha + 3$$

となり，これは $\alpha = 1$ のとき，最小値 -2 をとる．したがって，$\boldsymbol{x}^1 = \boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{d} = (3, 1)$ となる．これは，2 次関数 f の最適解となっている．一般に，関数 f が凸 2 次関数の場合には，ニュートン法により最適解が得られる．

1.9.6　演習問題 1.17 の略解

2 次計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

の KKT 条件は，(8) より，ある $\boldsymbol{u}_1 \in \mathcal{R}^m$ と $\boldsymbol{u}_2 \in \mathcal{R}^n$ が存在し，

$$\begin{array}{l} (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{u}_1 \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{u}_2 \geq \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{u}_1^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) = 0,\ \boldsymbol{u}_2^T\boldsymbol{x} = 0 \end{array}$$

となる．

1.9.7 演習問題 1.18 の略解

2 次計画問題

$$\begin{array}{cl} \text{最小化} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_1 \\ & \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_2 \end{array}$$

の KKT 条件は，(9) より，ある $\boldsymbol{u} \in \mathcal{R}^m$ と $\boldsymbol{v} \in \mathcal{R}^l$ が存在し，

$$\begin{array}{l} (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{A}_1^T\boldsymbol{u} + \boldsymbol{A}_2^T\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}_1 \leq 0 \\ \boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{u}^T(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}_1) = 0 \\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{0} \end{array}$$

となる.

謝辞：本テキストで使用している図の作成をしていただいた田中未来君 (東工大大学院生) に感謝します.