離散凸関数はどのような性質を満たすべきか: 離散最適化の視点から

塩浦 昭義

東北大学大学院 情報科学研究科

1. はじめに

与えられた解集合の中で，与えられた関数を最小(または最大) にするものを求める問題を, **最適化**問題もしくは**数理計画**問題と呼ぶ (最適化及び数理計画について詳しくは [4, 5, 13] などを参照)．最適化の分野は, 扱う問題の解集合 S 及び関数 f の構造によって, 実数変数に関する最適化である**連続最適化** (または**非線形最適化**) と, 整数変数に関する最適化である**離散最適化** (または**組合せ最適化**, **整数計画**) の大きく 2 つに分類することができる．連続最適化の分野では, 与えられた解集合や関数が「凸性」と呼ばれる性質をもっていると問題が効率的に解ける, ということが良く知られている．一方, 離散最適化の分野では, 解きやすい問題に現れる「良い構造」を凸性の視点から捉えようと言う試みが近年盛んに行われており, 様々な離散凸性の概念が提案されてきた．本稿では, これまでに提案された幾つかの離散凸性について解説し, どのような性質をもつ関数が離散凸関数として相応しいのか, 離散最適化の視点から考察する．

なお，離散凸関数は，離散最適化の分野だけでなく，数理経済学や工学の分野などにおいても有用な概念であり, 不可分割財を含む経済均衡の問題や行列を用いたシステム解析など, 様々な応用が知られている． 離散凸関数の応用について興味をおもちの方は [10, 11] を参照されたい．

2. 凸性の定義とその性質

本節では, 連続最適化の分野において重要な概念である, 凸集合及び凸関数の定義及びその性質について説明する．凸性について詳しくは [3] を参照されたい．

集合 $S \subseteq \mathbf{R}^n$ は, 任意の $x, y \in S$ および $\alpha \in [0, 1]$ に対して $\alpha x + (1-\alpha)y \in S$ を満たすときに**凸集合**と呼ばれる．同様に, 関数 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ は, 任意の $x, y \in \mathrm{dom}\, f \equiv \{z \in \mathbf{R}^n \mid f(z) < +\infty\}$ および $\alpha \in [0, 1]$ に対して不等式

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \qquad (1)$$

を満たすときに**凸関数**と呼ばれる．なお, f が連続の場合には, 凸性は次の**中点凸性**と等価である:

$$f((x+y)/2) \le \{f(x) + f(y)\}/2 \quad (x, y \in \mathrm{dom}\, f).$$

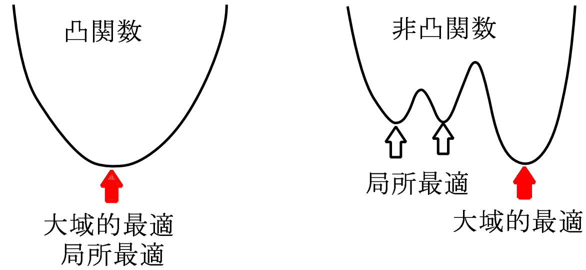

図 1: 局所最小性と大域的最小性

任意の集合 $S \subseteq \mathbf{R}^n$ に対し, その**標示関数** $\delta_S : \mathbf{R}^n \to \{0, +\infty\}$ を

$$\delta_S(x) = \begin{cases} 0 & (x \in S), \\ +\infty & (\text{その他}) \end{cases}$$

により定義する．すると, 集合 S の凸性とその標示関数の凸性が等価であり, また, 凸集合は凸関数の特殊ケースと見なせることが分かる．このような凸集合と凸関数の関係を踏まえて, 本稿では, 関数に対する○○性が定義されたとき, 集合に対する○○性を, その標示関数に対する○○性により定義し, 集合に対する○○性を関数に対する○○性の特殊ケースとして見なすことにする．

凸関数に対する基本的かつ重要な演算として, **和**と**たたみ込み**がある． 2 つの関数 $f_1, f_2 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ が与えられたとき, 和は $g(x) = f_1(x) + f_2(x)$ $(x \in \mathbf{R}^n)$ により, たたみ込みは

$$h(x) = \inf\{f_1(x_1) + f_2(x_2) \mid x_1 + x_2 = x\} \ (x \in \mathbf{R}^n)$$

により, それぞれ与えられる．凸関数のクラスは, これらの演算に関して閉じていることに注意されたい．

凸関数は様々な良い性質をもつが, 連続最適化の観点から特に重要なのは以下の 2 つの定理であろう．

次の定理は, 凸関数の大域的な最小性は局所的な最小性により保証されることを述べている (図 1 参照).

定理 1 (局所最小性＝大域的最小性). $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ は凸関数, $x \in \mathrm{dom}\, f$ とする．このとき, x のあ

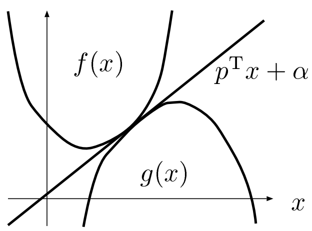

図 2: 分離定理. 凸関数が凹関数の上にあるとき, その間に挟まれる線形関数が存在する.

る近傍 $\mathrm{N}(x) \subseteq \mathbf{R}^n$ に対して $f(x) \le f(y)$ $(y \in \mathrm{N}(x))$ が成り立つことと, $f(x) \le f(y)$ $(y \in \mathbf{R}^n)$ が成り立つことは等価である. □

この性質より, 現在の点の近傍を調べ, 近傍内で関数値のより小さい点に (適切なやり方で) 移動する, ということを繰り返し行うと, 最終的に凸関数 f の最小解が得られることが分かる. すなわち, 降下法によって凸関数の最小化ができる. このことは, 凸性をもつ問題の「解きやすさ」の一端を表している.

関数 $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ は, $-g$ が凸関数のときに**凹関数**と呼ばれる. 次の定理は, 凸関数と凹関数を線形関数によって分離できることを示している (図 2 参照).

定理 2 (分離定理). 凸関数 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ と凹関数 $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ に対し, (適当な仮定のもとで) $f(x) \ge g(x)$ $(\forall x \in \mathbf{R}^n)$ が成り立つならば,

$$f(x) \ge p^{\mathrm{T}}x + \alpha \ge g(x) \qquad (\forall x \in \mathbf{R}^n)$$

を満たす $p \in \mathbf{R}^n$ と $\alpha \in \mathbf{R}$ が存在する. □

分離定理から, 連続最適化の理論において重要な役割を果たす双対定理を導くことができる.

また, 分離定理の系として, 次の性質が得られる:

系 3. 2 つの凸関数 $f_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ $(i = 1, 2)$ に対して (適当な仮定のもとで)

$$\begin{aligned} &\min_{x \in \mathbf{R}^n} \{f_1(x) + f_2(x)\} \\ &\quad = \min_{x \in \mathbf{R}^n} \{f_1(x) + p^{\mathrm{T}}x\} + \min_{x \in \mathbf{R}^n} \{f_2(x) - p^{\mathrm{T}}x\} \quad (2) \end{aligned}$$

を満たす $p \in \mathbf{R}^n$ が存在する. □

系 3 は, 式 (2) を満たす $p \in \mathbf{R}^n$ を求めることにより, 凸関数の和 $f_1 + f_2$ の最小化を, それぞれの凸関数の最小化という, より簡単な問題に帰着することができる, ということを述べている.

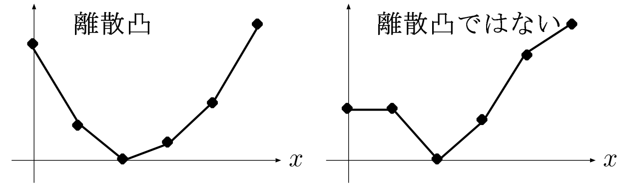

図 3: 一変数関数に対する離散凸性. 黒い点が関数 f を, 折れ線が関数 $\tilde{f}(x)$ を, それぞれ表す.

3. 離散凸関数の満たすべき性質

以下では, 整数格子点 $\mathbf{Z}^n$ 上で定義された関数のことを, 実数空間 $\mathbf{R}^n$ 上で定義された関数と区別するために, 特に**離散関数**と呼ぶことにする. 本節では, 離散関数に対する凸性 (離散凸性) をいかに定義すべきか考えていく.

まず, 一変数の離散関数 $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ に対する凸性を考える. この場合, グラフの各点 $(x, f(x))$ $(x \in \mathbf{Z})$ を線分で結んでいくことにより得られる区分線形関数 $\tilde{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ に注目し (図 3 参照), この関数 $\tilde{f}$ が凸であるような離散関数 f を離散凸と定義するのが自然であろう.

では, 一般の離散関数についてはどのように凸性を定義するのが良いだろうか? 一つの候補として, 一変数の離散凸関数 $f_i : \mathbf{Z} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ によって $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$ $(x \in \mathbf{Z}^n)$ と表せる関数, すなわち**分離凸関数**が挙げられる. 分離凸関数は確かに様々な良い性質を満たす. しかし, 分離凸関数はとても特殊な関数であり, 例えば分離凸性の集合版, すなわち, その標示関数が分離凸関数となるような集合は超直方体

$$\{x \in \mathbf{Z}^n \mid a_i \le x_i \le b_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)\}$$

に限定される. したがって, 分離凸関数は離散凸関数のクラスとしては小さすぎるので, 分離凸関数を含む, より広い離散関数のクラスを考える必要がある.

上記で考えた一変数関数に対する離散凸性は, 普通の凸関数に拡張できる, という性質により定義された. 一般の場合についても, 「離散凸関数ならば普通の凸関数へ拡張可能であって欲しい」と考えるのが自然であろう. 以下では, 「凸関数へ拡張可能」という言葉を厳密に定義をする.

離散関数 $f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ に対し, その**凸閉包**

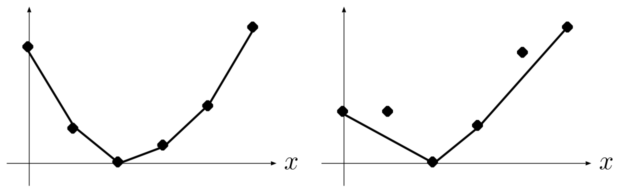

図 4: 離散関数の凸閉包. 黒い点が関数 f を, 折れ線が関数 $\overline{f}(x)$ を, それぞれ表す.

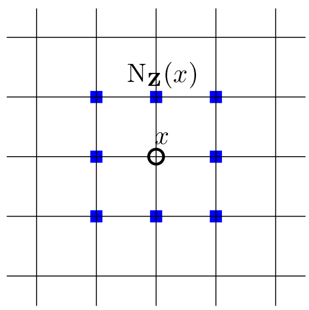

図 5: 整数ベクトル $x \in \mathbf{Z}^n$ の近傍 $\mathrm{N}_{\mathbf{Z}}(x)$

$\bar{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ を

$$\bar{f}(x) = \sup\{p^{\mathrm{T}}x + \alpha \mid p^{\mathrm{T}}y + \alpha \leq f(y) \ (y \in \mathbf{Z}^n)\} \qquad (x \in \mathbf{R}^n)$$

により定義する (図 4 参照). 直感的には, 凸閉包 $\bar{f}$ は条件 $\bar{f}(y) \leq f(y)$ $(y \in \mathbf{Z}^n)$ を満たす「最大」の凸関数である. 離散関数 f の凸閉包 $\bar{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ が $\bar{f}(x) = f(x)$ $(x \in \mathbf{Z}^n)$ を満たすとき, f を**凸拡張可能である**, と呼ぶことにする. 離散凸関数が満たすべき性質として, 最初に次の性質を挙げる:

P1 [凸拡張可能性]

「離散凸関数」ならば凸拡張可能.

一変数関数の場合は, 性質 P1 を満たす関数が離散凸関数として適切であることが分かった. これに倣い, 一般の場合についても凸拡張可能関数が離散凸関数として適切かどうか, 考えてみたい.

定理 1 では「局所最小＝大域的最小」という凸関数の性質について述べたが, これは凸性をもつ連続最適化問題の解きやすさにつながる性質なので, 離散凸関数でも同様の性質が成り立って欲しい. 整数ベクトル $x \in \mathbf{Z}^n$ の局所最小性を定義するために, その近傍 $\mathrm{N}_{\mathbf{Z}}(x) \subseteq \mathbf{Z}^n$ を次のように定める (図 5 参照):

$$\mathrm{N}_{\mathbf{Z}}(x) = \{y \in \mathbf{Z}^n \mid ||y - x||_\infty \leq 1\}.$$

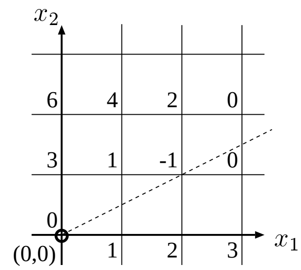

図 6: 凸拡張可能だが P2 を満たさない離散関数の例. 点線は直線 $x_1 - 3x_2 = -2x_1 + 3x_2$ を表す.

P2 [局所最小＝大域的最小]

$f(x) \leq f(y)$ $(y \in \mathrm{N}_{\mathbf{Z}}(x)) \Longleftrightarrow f(x) \leq f(y)$ $(y \in \mathbf{Z}^n)$

普通の凸関数の場合と同様に, 離散凸関数が上記の性質 P2 を満たすならば, 離散凸関数に対しても降下法により, 簡単に最小解を求めることができる.

さて, 離散凸関数の候補に挙げられている凸拡張可能関数であるが, 性質 P2 を満たすとは限らないことが次の例から分かる.

例 4 (凸拡張可能だが P2 を満たさない例). 関数

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \max\{x_1 - 3x_2, -2x_1 + 3x_2\} & \\ & (x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0) \\ +\infty & (\text{その他}) \end{cases}$$

は凸拡張可能である (図 6 参照). ここでベクトル $(0, 0)$ は局所最小であるが大域的最小ではない. □

したがって, 一般の場合には, 凸拡張可能性だけでは離散凸性を定義するには不十分なことが分かった.

4. Miller の離散凸関数

本節では, Miller [6] の提案した離散凸性を紹介する.

離散凸性を定義するためのアイディアとして, 凸性を定義する不等式 (1) の離散版を考える. 整数ベクトル $x, y \in \mathbf{Z}^n$ および $\alpha \in [0, 1]$ が与えられたとき, $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$ は一般に整数ベクトルとは限らない. Miller [6] はベクトル z の代わりに近傍

$$\mathrm{HC}(z) = \{z' \in \mathbf{Z}^n \mid \lfloor z_i \rfloor \leq z'_i \leq \lceil z_i \rceil \ (\forall i)\}$$

(図 7 参照) を用いた不等式

$$\min\{f(z') \mid z' \in \mathrm{HC}(z)\} \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha) f(y)$$

を考え, 任意の $x, y \in \mathrm{dom}\, f$ および $\alpha \in [0, 1]$ に対してこの不等式を満たす離散関数 $f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ を離散凸関数と定めた.

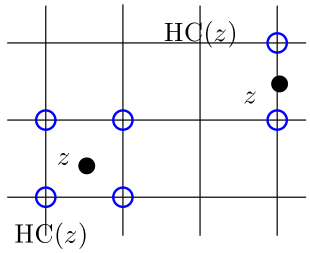

図 7: 集合 HC(z) の定義．黒丸で表されるベクトル z に対して, HC(z) に含まれる点は白丸で表わされる．

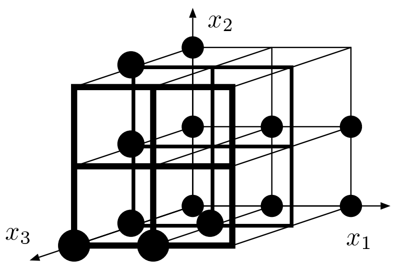

図 8: Miller の離散凸性を満たすが凸拡張可能でない集合の例．黒丸が集合内の点を表す．点 $(1,1,1)$ が含まれていないことに注意されたい．

Miller の離散凸関数は性質 P2 を満たすことが知られている [6]．一方, Miller の離散凸関数は凸拡張可能であるとは限らない．

例 5 (Miller の離散凸関数で P1 を満たさない例).

$$S = \{x \in \mathbf{Z}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 \leq 2,\ x_i \geq 0\ (\forall i)\} \\ \cup\{(1,2,0),(0,1,2),(2,0,1)\}$$

により与えられた集合 $S \subseteq \mathbf{Z}^3$ (図 8 参照) に対し, その標示関数 δ_S は Miller の離散凸関数である．しかし,

$$\{(1,2,0)+(0,1,2)+(2,0,1)\}/3 = (1,1,1) \notin S$$

より δ_S は P1 を満たさない． □

したがって, Miller の離散凸関数も, 離散凸関数としては不十分な概念である．

5.　Favati–Tardella の離散凸関数

本節では, Favati–Tardella [1] の提案した**整凸関数**という概念を紹介する． 整凸関数は凸拡張可能性と Miller の離散凸性の両方を満たす概念である．

整凸関数を定義するために, まず離散関数 $f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ の**局所凸拡張** $\tilde{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ を定義する．任意の実ベクトル $x \in \mathbf{R}^n$ に対し, f を近傍 HC(x) の上へ制限して得られる離散関数 f_x を

$$f_x(z) = \begin{cases} f(z) & (z \in \mathrm{HC}(x)), \\ +\infty & (\text{その他}) \end{cases}$$

により定め, その凸閉包 $\overline{(f_x)} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ を考える．このとき, 局所凸拡張 $\tilde{f}$ の x における値 $\tilde{f}(x)$ は $\overline{(f_x)}(x)$ により定められる．例えば一変数の離散関数の場合, 局所凸拡張 $\tilde{f}$ は図 3 のように区分線形関数により与えられる．その定義により, 局所凸拡張は常に $\tilde{f}(y) = f(y)$ $(y \in \mathbf{Z}^n)$ を満たすことに注意されたい．なお, 整数ベクトル集合の局所凸拡張は図 9 に示されるような集合となる．

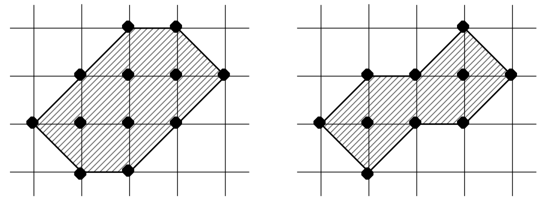

図 9: 整数ベクトル集合の局所凸拡張．斜線の領域が局所凸拡張を表す．左の集合は整凸であるが, 右の集合は整凸ではない．

離散関数の局所凸拡張は必ずしも凸関数とは限らない．Favati–Tardella [1] は, 局所凸拡張 $\tilde{f}$ が凸関数となるような離散関数 f を整凸関数と定めた．その定義により, 整凸関数は凸拡張可能であり, かつ Miller の離散凸性を満たすことが示せる．したがって, 離散凸関数として満たすべき性質 P1 および P2 を, 整凸関数は満たす．このように, 整凸関数は凸拡張可能関数や Miller の離散凸関数に比べるとより良い性質をもつ関数であるが, 以下に述べるように, 離散凸関数としてはまだ不十分な概念である．

一つの例として, $\{0,1\}$-ベクトル集合 $\{0,1\}^n$ の上で定義された離散関数 (以下, $\{0,1\}$-離散関数) について考える． 組合せ最適化問題のほとんどは, $\{0,1\}$-離散関数の最小化問題として定式化できる． 任意の $\{0,1\}$-離散関数の局所凸拡張は必ず凸関数になるので, $\{0,1\}$-離散関数全体は整凸関数のクラスに含まれる．しかし, $\{0,1\}$-離散関数の中には NP 困難な組合せ最適化問題に対応する関数も存在するが, そのような関数は離散凸関数として相応しいとは言えない．

また, 整凸関数は Miller の離散凸関数の特殊ケース

なので,「局所最小＝大域的最小」という性質 P2 を満たす．しかし, 近傍 $\mathrm{N}_{\mathbf{Z}}(x)$ ($x \in \mathbf{Z}^n$) は 3^n 個のベクトルを含むので, 局所最小性のチェックに指数時間を要する．これでは, 離散最適化の観点から見て,「良い」性質とは必ずしも言えない．この点を踏まえ, 離散凸関数の満たすべき性質として P2 より強い性質を考える:

P2′[局所最小 = 大域的最小 (多項式時間版)]

ある近傍 $\widehat{\mathrm{N}}_{\mathbf{Z}}(x) \subseteq \mathrm{N}_{\mathbf{Z}}(x)$ が存在して,

- $f(x) \le f(y)$ $(y \in \widehat{\mathrm{N}}_{\mathbf{Z}}(x))$
  $\iff f(x) \le f(y)$ $(y \in \mathbf{Z}^n)$,
- 局所最小性のチェックが多項式時間で可能.

例えば, 分離凸関数 $f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i)$ の場合,

$$\widehat{\mathrm{N}}_{\mathbf{Z}}(x) = \{x \pm \chi_i \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$$

という近傍を選ぶことにより, 性質 P2′ が成り立つことが分かる．ここで $\chi_i \in \{0,1\}^n$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ は第 i 成分に関する単位ベクトルを表す．

次に, 定理 2 で述べた分離定理の離散版を考える．

P3 [離散分離定理]

「離散凸関数」$f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ と「離散凹関数」$g : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ に対し, $f(x) \ge g(x)$ $(x \in \mathbf{Z}^n)$ が成り立つならば,

$$f(x) \ge p^{\mathrm{T}} x + \alpha \ge g(x) \qquad (x \in \mathbf{Z}^n) \tag{3}$$

を満たす $p \in \mathbf{R}^n$ と $\alpha \in \mathbf{R}$ が存在する.

凸関数に対する分離定理の場合と同様に, 離散分離定理は離散最適化において理論とアルゴリズム構築の両面で非常に有用な性質である．分離凸関数については, 性質 P3 が成り立つことが比較的簡単に示せる．一方, 整凸関数に対しては P3 は必ずしも成り立たない．

例 6 (整凸関数で P3 を満たさない例).

$$f(x_1, x_2) = \max\{0, x_1 + x_2 - 1\} \quad ((x_1, x_2) \in \mathbf{Z}^2),$$
$$g(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\} \quad ((x_1, x_2) \in \mathbf{Z}^2))$$

により与えられる関数 f と g はそれぞれ整凸および整凹であるが, $f(x) \ge p^{\mathrm{T}} x + \alpha \ge g(x)$ を満たす $p \in \mathbf{R}^2, \alpha \in \mathbf{R}$ は存在しない．$\max\{0, 1/2 + 1/2 - 1\} < \min\{1/2, 1/2\}$ となることに注意されたい． □

6. L 凸関数と M 凸関数

L 凸関数と**M 凸関数**は室田 [7, 8] により提案された

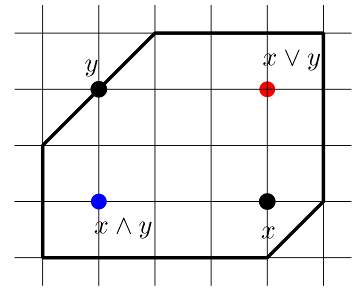

図 10: $\mathrm{L}^\natural$ 凸集合

概念である．本節では, M 凸関数および L 凸関数と等価な概念である, **$\mathrm{L}^\natural$ 凸関数** (藤重–室田 [2]) および **$\mathrm{M}^\natural$ 凸関数** (室田–塩浦 [12]) について考える．これらの概念に関してより詳しくは [9, 10, 11] を参照されたい.

6.1 $\mathrm{L}^\natural$ 凸関数

任意のベクトル $x, y \in \mathbf{Z}^n$ に対し, ベクトル $x \wedge y, x \vee y \in \mathbf{Z}^n$ をそれぞれ $(x \wedge y)_i = \min\{x_i, y_i\}$, $(x \vee y)_i = \max\{x_i, y_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ により定義する (図 10 参照)．任意の $x, y \in \mathbf{Z}^n$ 及び非負整数 α に対して

$$f(x) + f(y) \ge f((x - \alpha\mathbf{1}) \vee y) + f(x \wedge (y + \alpha\mathbf{1}))$$

を満たす離散関数 $f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ は $\mathrm{L}^\natural$ 凸関数と呼ばれる．ここで $\mathbf{1} \in \mathbf{Z}^n$ はすべての成分が 1 であるベクトルである．$\mathrm{L}^\natural$ 凸関数は, 劣モジュラ不等式

$$f(x) + f(y) \ge f(x \vee y) + f(x \wedge y) \ (x, y \in \mathrm{dom}\, f)$$

を満たす整凸関数として特徴づけられる．また, $\mathrm{L}^\natural$ 凸関数は次の**離散中点凸性**を用いても特徴づけできる:

$$f\left(\left\lceil \frac{x+y}{2} \right\rceil\right) + f\left(\left\lfloor \frac{x+y}{2} \right\rfloor\right) \le f(x) + f(y) \qquad (x, y \in \mathrm{dom}\, f).$$

ここで, 任意のベクトル $z \in \mathbf{R}^n$ に対し整数ベクトル $\lceil z \rceil, \lfloor z \rfloor \in \mathbf{Z}^n$ は $(\lceil z \rceil)_i = \lceil z_i \rceil, (\lfloor z \rfloor)_i = \lfloor z_i \rfloor$ により, それぞれ与えられる．$\mathrm{L}^\natural$ 凸集合の例を図 10 に示す.

上記の特徴づけより, $\mathrm{L}^\natural$ 凸関数は整凸関数であることが分かる．したがって, 離散凸関数として満たすべき性質 P1 および P2 を満たすが, さらに性質 P2′ および P3 も満たすことが知られている.

定理 7. $\mathrm{L}^\natural$ 凸関数 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ および $x \in \mathrm{dom}\, f$ に対し, 以下が成り立つ:

$$f(x) \le f(x \pm d) \quad (\forall d \in \{0,1\}^n)$$
$$\iff f(x) \le f(y) \quad (\forall y \in \mathbf{Z}^n). \qquad \square$$

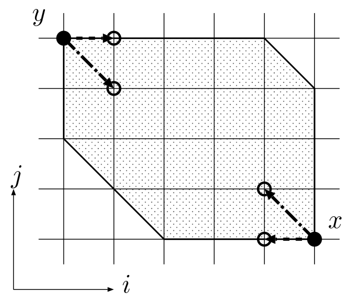

図 11: M$^\natural$ 凸集合

上記の局所最小性判定は劣モジュラ集合関数の最小化に帰着できるので, 局所最小性を多項式時間で調べることができる.

定理 8. L$^\natural$ 凸関数 $f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ と L$^\natural$ 凹関数 $g : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ に対し, (適当な仮定のもとで) $f(x) \geq g(x)$ $(x \in \mathbf{Z}^n)$ が成り立つならば, (3) を満たす $p \in \mathbf{R}^n$ と $\alpha \in \mathbf{R}$ が存在する. さらに, f と g の関数値が整数の場合には, (3) を満たす $p \in \mathbf{Z}^n$ と $\alpha \in \mathbf{Z}$ が存在する. □

L$^\natural$ 凸関数は和の演算に関しては閉じていることが示せるが, たたみ込みに関しては閉じていない. 2 つの L$^\natural$ 凸関数のたたみ込みにより表現できる関数は **L$_2^\natural$ 凸関数**と呼ばれている. L$_2^\natural$ 凸関数は, L$^\natural$ 凸関数全体を含む関数のクラスであり, また整凸関数のクラスに含まれることが知られている. したがって, L$_2^\natural$ 凸関数に対して性質 P1 および P2 が成り立ち, さらに 性質 P2$'$ も成り立つ. しかし, 性質 P3 については成り立たない例が存在する.

6.2 M$^\natural$ 凸関数

M$^\natural$ 凸関数は次の交換公理により定義される (図 11 参照):

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall x, y \in \mathrm{dom}\, f,\ \forall i \in \{h \mid x_h > y_h\}: \\ \quad \text{(i)}\ f(x) + f(y) \geq f(x - \chi_i + \chi_j) + f(y + \chi_i - \chi_j) \\ \qquad\qquad (\exists j \in \{k \mid x_k < y_k\}),\ \text{もしくは} \\ \quad \text{(ii)}\ f(x) + f(y) \geq f(x - \chi_i) + f(y + \chi_i). \end{array}}$$

M$^\natural$ 凸集合の例を図 11 に示す.

M$^\natural$ 凸関数は整凸関数であることが知られている. したがって, M$^\natural$ 凸関数は性質 P1 および P2 を満たす. さらには, 性質 P2$'$ および P3 も成り立つことが分かっている.

定理 9. M$^\natural$ 凸関数 $f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ および $x \in \mathrm{dom}\, f$ に対し, 以下が成り立つ:

$$f(x) \leq f(x - \chi_i + \chi_j)\ (\forall i, j),\ f(x) \leq f(x \pm \chi_i)\ (\forall i)$$
$$\iff f(x) \leq f(y) \quad (\forall y \in \mathbf{Z}^n). \qquad \square$$

上記の局所最小性を判定するには $n^2 + n + 1$ 個のベクトルを調べれば良いことに注意されたい.

定理 10. M$^\natural$ 凸関数 $f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ と M$^\natural$ 凹関数 $g : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ に対し, (適当な仮定のもとで) $f(x) \geq g(x)$ $(x \in \mathbf{Z}^n)$ が成り立つならば, (3) を満たす $p \in \mathbf{R}^n$ と $\alpha \in \mathbf{R}$ が存在する. さらに, f と g の関数値が整数の場合には, (3) を満たす $p \in \mathbf{Z}^n$ と $\alpha \in \mathbf{Z}$ が存在する. □

M$^\natural$ 凸関数はたたみ込みの演算に関しては閉じていることが示せるが, 和に関しては閉じていない. 2 つの M$^\natural$ 凸関数の和により表現できる関数は **M$_2^\natural$ 凸関数**と呼ばれている. M$_2^\natural$ 凸関数は, その定義より明らかに M$^\natural$ 凸関数全体を含む関数のクラスであり, また整凸関数のクラスに含まれることが知られている. したがって, M$_2^\natural$ 凸関数に対して性質 P1 および P2 が成り立ち, さらに 性質 P2$'$ も成り立つ. しかし, 性質 P3 については成り立たない例が存在する.

7. おわりに

本稿で扱った, 様々な離散凸性の関係を図 12 にまとめた. L$^\natural$ 凸関数と M$^\natural$ 凸関数の共通部分, および L$_2^\natural$ 凸関数と M$_2^\natural$ 凸関数の共通部分がそれぞれ分離凸関数のクラスに一致していることに注意されたい.

本稿では,

Miller の離散凸関数 → 整凸関数 → M$^\natural$ 凸/L$^\natural$ 凸関数

の順に離散凸関数の概念を紹介してきた. しかし, これは実際の研究の流れとは異なっており, M$^\natural$ 凸関数および L$^\natural$ 凸関数の概念は Miller の離散凸関数や整凸関数の概念とは独立に提案されたことを断っておく. M$^\natural$ 凸関数および L$^\natural$ 凸関数の概念が提案されるまでの歴史的な流れを簡単にまとめると,

マトロイド	→	付値マトロイド
↓		↓
ポリマトロイド	→	M 凸 (M$^\natural$ 凸) 関数

劣モジュラ集合関数	→	L 凸 (L$^\natural$ 凸) 関数

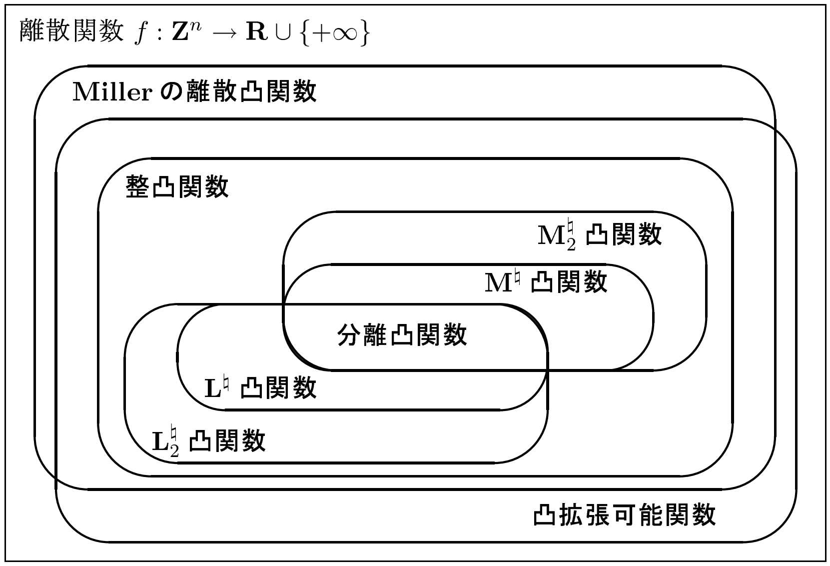

図 12: 様々な離散凸性の関係

のようになる. 離散凸関数の歴史について詳しくは [10] を参照されたい.

これまでの議論から, $\mathrm{L}^\natural$ 凸関数と $\mathrm{M}^\natural$ 凸関数は離散凸関数として満たすべき性質 P1, P2′, および P3 を満たすことが分かった. このことから $\mathrm{L}^\natural$ 凸性や $\mathrm{M}^\natural$ 凸性をもつ離散最適化問題は「解きやすい」ということがわかり, 実際に効率的なアルゴリズムが提案されている [10, 11]. しかし, 性質 P1, P2′, および P3 を満たす離散関数は $\mathrm{L}^\natural$ 凸関数や $\mathrm{M}^\natural$ 凸関数以外にも存在することが分かっている. $\mathrm{L}^\natural$ 凸関数や $\mathrm{M}^\natural$ 凸関数全体を含み, かつ性質 P1, P2′, および P3 を満たす離散関数のクラスを明確にすることが今後の課題の一つである.

最後に, 本稿を書く機会を与えて下さった毛利裕昭氏, およびこの原稿に対する有用なコメントを下さった田村明久氏, 徳山豪氏, 森口聡子氏に感謝したい.

参考文献

[1] Favati, P. and Tardella, F.: “Convexity in nonlinear integer programming,” *Ricerca Operativa* **53**, 3–44 (1990).

[2] Fujishige, S. and Murota, K.: “Notes on L-/M-convex functions and the separation theorems,” *Math. Programming* **88**, 129–146 (2000).

[3] 福島雅夫: “非線形最適化の基礎,” 朝倉書店 (2001).

[4] 福島雅夫: “数理計画入門,” 朝倉書店 (1996).

[5] 茨木俊秀, 福島雅夫: “最適化の手法,” 共立出版 (1993).

[6] Miller, B. L.: “On minimizing nonseparable functions defined on the integers with an inventory application,” *SIAM J. Appl. Math.* **21**, 166–185 (1971).

[7] Murota, K.: “Convexity and Steinitz’s exchange property,” *Adv. Math.* **124**, 272–311 (1996).

[8] Murota, K.: “Discrete convex analysis,” *Math. Programming* **83**, 313–371 (1998).

[9] 室田一雄: “離散凸解析,” 藤重悟 (編), 離散構造とアルゴリズム V, 近代科学社 (1998), 51–100.

[10] 室田一雄: “離散凸解析,” 共立出版 (2001).

[11] Murota K.: “Discrete Convex Analysis”, to be published.

[12] Murota, K. and Shioura, A.: “M-convex function on generalized polymatroid,” *Math. Oper. Res.* **24**, 95–105 (1999).

[13] 田村明久, 村松正和: “最適化法,” 共立出版 (2002).