

# 数理手法III

## (数理最適化) 第2回

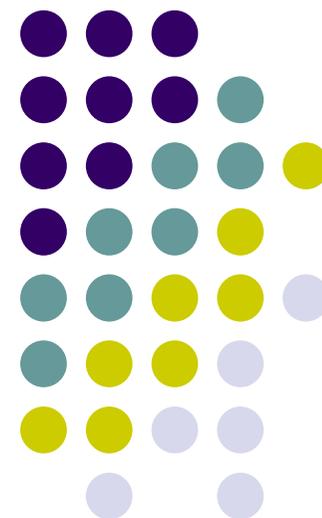
### 線形計画問題とその標準形 双対問題

塩浦昭義

東京工業大学 経営工学系 准教授

[shioura.a.aa@m.titech.ac.jp](mailto:shioura.a.aa@m.titech.ac.jp)

<http://www.soc.titech.ac.jp/~shioura/teaching/TUmp17>





# 今日の講義の流れ

## 線形計画問題に関する用語と定理

- 不等式標準系, 等式標準系
- 双対問題
- LPの諸定理



# 線形計画問題

線形計画問題 (Linear Programming Problem) の定義

- 目的関数(objective function)が線形
  - 制約(constraint)が線形
- という最適化問題

目的は「最大化」「最小化」  
どちらでもよい

$$\begin{array}{l} \text{最大化} \quad 2x + 2y + 3z \\ \text{条件} \quad 5x \quad \quad + 3z \leq 8 \\ \quad \quad \quad \quad \quad 2z = 2 \\ \quad \quad \quad 4y + \quad z \geq 9 \\ \quad x, y \geq 0 \end{array}$$

制約式は「 $\geq$ 」「 $=$ 」「 $\leq$ 」  
どれでもよい  
(「 $>$ 」「 $<$ 」は不可)

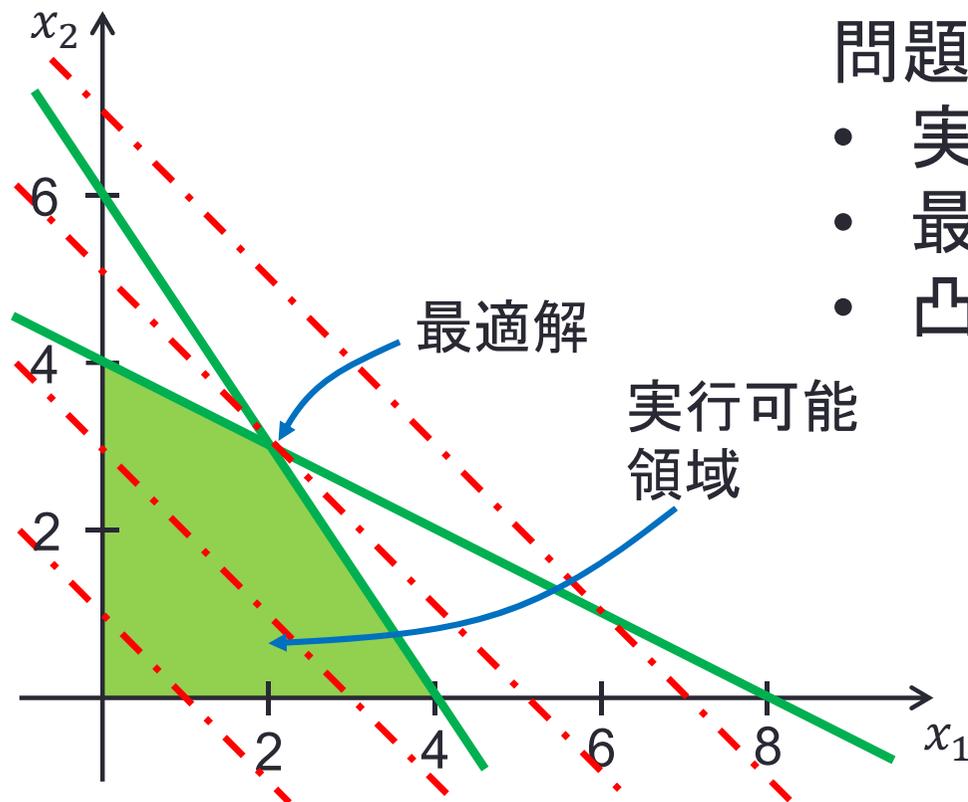
変数は  
「不等号つき」「不等号なし」  
どちらでもよい

# 2変数の線形計画問題(その1)

例題

$$\begin{aligned} \text{最小化: } & -x_1 - x_2 \\ \text{条件: } & 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

問題の性質を知るために、問題を図を使って表現する



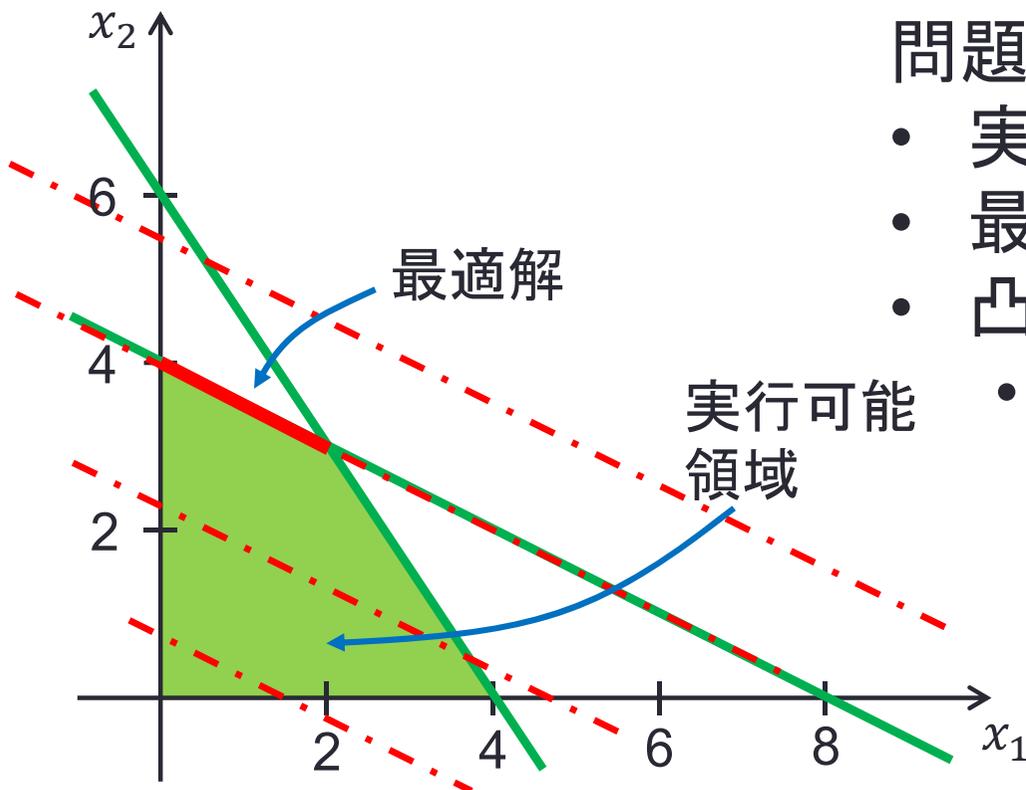
問題を図示してわかること

- 実行可能領域は平面上の**凸多角形**
- 最適解は凸多角形の境界に位置
- 凸多角形の**頂点の1つは最適解**

# 2変数の線形計画問題(その2)

例題

$$\begin{aligned} \text{最小化: } & -x_1 - 2x_2 \\ \text{条件: } & 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



問題を図示してわかること

- 実行可能領域は平面上の**凸多角形**
- 最適解は凸多角形の境界に位置
- 凸多角形の**頂点の1つは最適解**
  - 最適解が複数存在することもあり



# LPの不等式標準形

任意の形のLPを  
扱うのは面倒

⇒ 不等式標準形

(inequality standard form)

- ◆ 目的は**最小化** (minimization)
- ◆ 制約式は**不等式** (inequality)  
「左辺  $\geq$  右辺」の形
- ◆ 各変数は**非負** (nonnegative)

**最小化**  $C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n$

**条件**  $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2$$

...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$



# 不等式標準形への変形

命題2. 1: 任意のLPは不等式標準形に変換できる

次の4つの変換法を利用

**【式と同値変形】** 等式を二つの不等式で表現

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j = b \quad \longrightarrow \quad \sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b, \quad \sum_{j=1}^n a_j x_j \geq b$$

**【目的関数の-1倍】** 最大化から最小化へ

$$\text{最大化} \quad \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad \longrightarrow \quad \text{最小化} \quad -\sum_{j=1}^n c_j x_j$$

**【制約の-1倍】** 不等式を“ $\leq$ ”から“ $\geq$ ”へ

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b \quad \longrightarrow \quad -\sum_{j=1}^n a_j x_j \geq -b$$



# 不等式標準形への変形

## 【差による表現】

非負制約のない変数を2つの非負変数で表現

$$x_j \text{ (非負制約なし)} \longrightarrow x_j = x_{j1} - x_{j2}, x_{j1} \geq 0, x_{j2} \geq 0$$

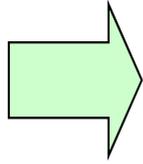


# 不等式標準形への変形の例

最大化  $3x + 2y$

条件  $x + y = 1$

$x \geq 0$



最大化  $3x + 2(y_1 - y_2)$

条件  $x + (y_1 - y_2) = 1$

$x \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$

最小化  $-3x - 2(y_1 - y_2)$

条件  $x + (y_1 - y_2) = 1$

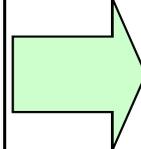
$x \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$

最小化  $-3x - 2(y_1 - y_2)$

条件  $x + (y_1 - y_2) \leq 1$

$x + (y_1 - y_2) \geq 1$

$x \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$



最小化  $-3x - 2(y_1 - y_2)$

条件  $-x - (y_1 - y_2) \geq -1$

$x + (y_1 - y_2) \geq 1$

$x \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$

# 「差による表現」による変形の妥当性



## 【差による表現】

$$x_j \text{ (非負制約なし)} \longrightarrow x_j = x_{j1} - x_{j2}, x_{j1} \geq 0, x_{j2} \geq 0$$

変換前の問題:  $P_1$

変換後の問題:  $P_2$

P1とP2は本質的に等価

- $(s_1, \dots, s_j, \dots, s_n): P_1$  の許容解  
 $\longrightarrow (s_1, \dots, s_{j1}, s_{j2}, \dots, s_n): P_2$  の許容解, 目的関数値同じ  
ただし  $s_{j1} = s_j, s_{j2} = 0$  ( $s_j \geq 0$  のとき)  
 $s_{j1} = 0, s_{j2} = -s_j$  ( $s_j < 0$  のとき)

例:  $(x, y) = (3, -2)$  は  $x + y = 1, x \geq 0$  を満たす

$\Rightarrow (x, y_1, y_2) = (3, 0, 2)$  は  $x + (y_1 - y_2) = 1, x, y_1, y_2 \geq 0$  を満たす

# 「差による表現」による変形の妥当性



## 【差による表現】

$$x_j \text{ (非負制約なし)} \longrightarrow x_j = x_{j1} - x_{j2}, x_{j1} \geq 0, x_{j2} \geq 0$$

変換前の問題:  $P_1$

変換後の問題:  $P_2$

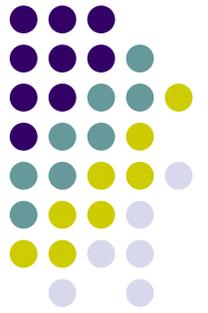
P1とP2は本質的に等価

- $(t_1, \dots, t_{j1}, t_{j2}, \dots, t_n): P_2$ の許容解

$\longrightarrow (t_1, \dots, t_{j1} - t_{j2}, \dots, t_n): P_1$ の許容解, 目的関数値同じ

例:  $(x, y_1, y_2) = (2, 1, 2)$  は  $x + (y_1 - y_2) = 1, x, y_1, y_2 \geq 0$  を満たす  
 $\Rightarrow (x, y) = (2, 1 - 2) = (2, -1)$  は  $x + y = 1, x \geq 0$  を満たす

# 等式標準形



- LPの**等式標準形**  
(equality standard form)
- ◆ 目的は**最小化**
- ◆ 制約は**等式(equation)**
- ◆ 各変数は**非負**

**最小化**  $C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n$

**条件**  $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$



# 等式標準形への変形

命題2. 2: 任意のLPは等式標準形に変換できる

- 任意のLPは不等式標準形に変換できる(命題2. 1)
- 不等式「左辺 $\geq$ 右辺」を等式へ

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad \longrightarrow \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i, \quad x_{n+i} \geq 0$$

新しい非負変数  $x_{n+i}$  を利用  
(**スラック変数, slack variable**)

$$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + x_3 &\geq -1 \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 &= -1 \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$



# 双対問題

- LPの最適値を下から見積もりたい  
(最適値の下界値の計算)

最小化  $-2x_1 - x_2 - x_3$

条件  $-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -4$  ①

$-2x_1 - 4x_3 \geq -4$  ②

$4x_1 - 3x_2 + x_3 \geq -1$  ③

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

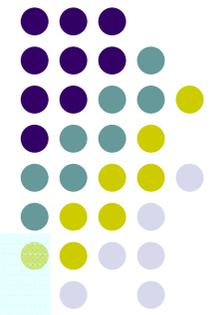
→ 制約を足し合わせてみる

• 目的関数  $\geq$  ②  $\times$  3 + ③ =  $-2x_1 - 3x_2 - 11x_3 \geq -13$

• 目的関数  $\geq$  ①  $\times$  0.5 + ②  $\times$  0.5 =  $-2x_1 - x_2 - 1.5x_3 \geq -4$

より  
良い  
下界

# 双対問題



$$\text{最小化 } -2x_1 - x_2 - x_3$$

$$\text{条件 } -2x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -4 \quad \textcircled{1}$$

$$-2x_1 \quad - 4x_3 \geq -4 \quad \textcircled{2}$$

$$4x_1 - 3x_2 + x_3 \geq -1 \quad \textcircled{3}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

より一般に, 非負実数  
 $y_1, y_2, y_3$  を使うと

$$\textcircled{1} \times y_1 + \textcircled{2} \times y_2 + \textcircled{3} \times y_3$$

$$\text{左辺: } (-2y_1 - 2y_2 + 4y_3)x_1 + (-2y_1 - 3y_3)x_2 + (y_1 - 4y_2 + y_3)x_3$$

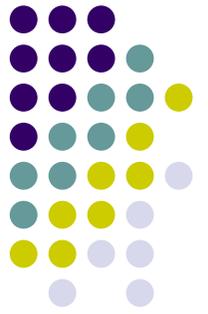
$$\text{右辺: } -4y_1 - 4y_2 - y_3$$

$$\left. \begin{aligned} -2y_1 - 2y_2 + 4y_3 &\leq -2 \\ -2y_1 \quad - 3y_3 &\leq -1 \\ y_1 - 4y_2 + y_3 &\leq -1 \end{aligned} \right\}$$

が成り立つならば

目的関数  $\geq$  左辺  $\geq$  右辺

$$= -4y_1 - 4y_2 - y_3$$



# 双対問題

最も大きな下界値を求めたい⇒新たなLP

$$\begin{aligned} \text{最大化} & \quad -4y_1 - 4y_2 - y_3 \\ \text{条件} & \quad -2y_1 - 2y_2 + 4y_3 \leq -2 \\ & \quad -2y_1 \quad \quad -3y_3 \leq -1 \\ & \quad \quad y_1 - 4y_2 + y_3 \leq -1 \\ & \quad y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

もとの問題に対する  
双対問題  
(dual problem)

もとの問題・・・主問題 (primal problem)



# 主問題と双対問題

## 主問題

最小化  $c_1x_1 + \dots + c_nx_n$

条件  $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$

$$a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2$$

...

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

$$x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

## 双対問題

最大化  $b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m$

条件  $a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \leq c_1$

$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \leq c_2$$

...

$$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \leq c_n$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \dots, y_m \geq 0$$

最小化  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$

条件  $A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

行列表現

最大化  $\mathbf{b}^T \mathbf{y}$

条件  $A^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}$

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$



# 主問題と双対問題

性質：双対問題の双対問題は主問題に一致する

証明→レポート問題

- 手順(1) 双対問題を不等式標準形に書き換え
- (2) 書き換えた問題の双対問題をつくる
- (3) 得られた双対問題を変換すると  
もとの問題に一致することを確認する。

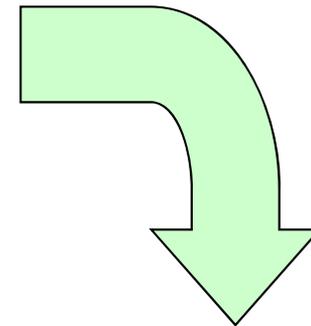
# 等式標準形の双対問題



- LPの等式標準形

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{条件} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\ & x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

不等式標準形に  
変換



$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{条件} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq -b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\ & x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

# 等式標準形の双対問題



→  
双対問題  
をつくる

$$\begin{aligned} \text{最大化} \quad & \sum_{i=1}^m b_i y_i' + \sum_{i=1}^m (-b_i) y_i'' \\ \text{条件} \quad & \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i' + \sum_{i=1}^m (-a_{ij}) y_i'' \leq c_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\ & y_i' \geq 0, \quad y_i'' \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{最大化} \quad & \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ \text{条件} \quad & \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

↙  
 $y_i' - y_i''$  を  
非負制約なし変数  
 $y_i$  に置き換え

等式標準形のLPに対する双対問題

# 実行可能, 実行不可能



定義: 不等式標準形のLPに対し

- **実行可能(feasible)**  $\Leftrightarrow$  許容解(実行可能解)が存在する
- **実行不可能(infeasible)**  $\Leftrightarrow$  許容解(実行可能解)が存在しない

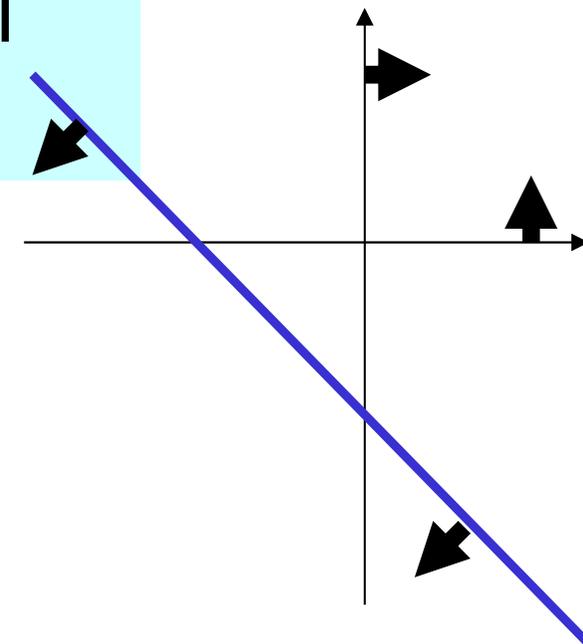
最小化  $x + 2y$   
条件  $-x - y \geq -3$   
 $x, y \geq 0$

実行可能

(1, 1)は許容解

最小化  $x + 2y$   
条件  $-x - y \geq 1$   
 $x, y \geq 0$

実行不可能





# 有界, 非有界

定義: 実行可能なLPは (最小化の場合)

- 有界(bounded)  
⇔ 任意の許容解の目的関数値がある定数より大きい
- 非有界(unbounded) ⇔ 目的関数値をいくらでも小さく出来る

最小化  $x + 2y$   
条件  $-x - y \geq -3$   
 $x, y \geq 0$

有界

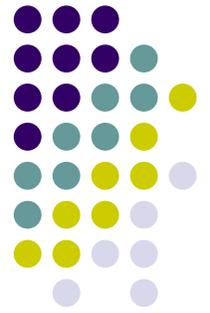
目的関数値  $\geq 0$

最小化  $-x - y$   
条件  $x + y \geq 0$   
 $x, y \geq 0$

非有界

任意の  $\alpha > 0$  に対し  $(\alpha, \alpha)$  は許容解  
目的関数値  $= -2\alpha$

# LPの基本定理



定理3. 1 (基本定理, fundamental theorem)

任意のLPに対し、

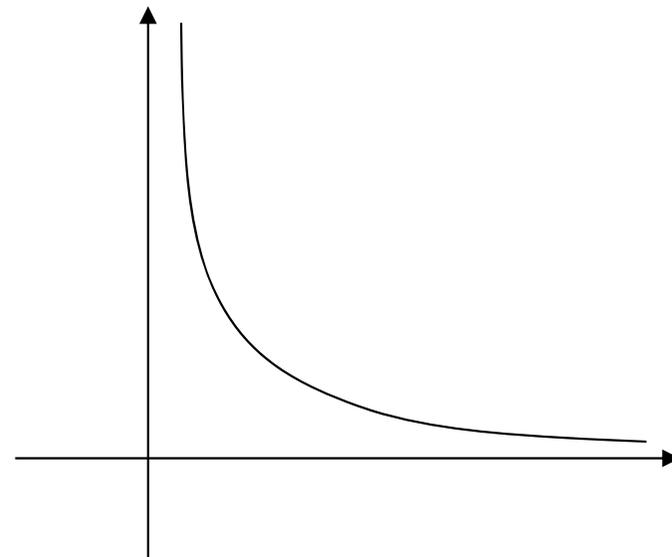
**実行可能かつ有界**  $\Rightarrow$  **最適解が存在**

※非線形計画の場合は成り立つとは限らない！

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & y \\ \text{条件} & xy \geq 1 \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$

最適値 = 0

でも  $y = 0$  なる許容解はない



# 演習問題

問1:

(1) 右の線形計画問題を  
不等式標準形に  
書き直せ.

$$\begin{aligned} \text{最大化: } & 2x + 2y + 3z \\ \text{条件: } & 5x + 3z \leq 8 \\ & 2z = 2 \\ & 4y + z \geq 9 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

(2) 右の線形計画問題を  
不等式標準形および  
等式標準形に  
書き直せ.

$$\begin{aligned} \text{最大化: } & 3x + 6y \\ \text{条件: } & x + y = 2 \\ & x + 4y \leq 2 \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$



# 演習問題

問2:

- (1) 下記の線形計画問題の実行可能領域を図示し、最適解を求めなさい。

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & 3x_1 + 6x_2 \\ \text{条件} & x_1 + x_2 \geq 2 \\ & x_1 + 4x_2 \geq 5 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

- (2) 上記の線形計画問題の双対問題を求めなさい。  
(3) 双対問題の実行可能領域を図示し、最適解を求めなさい。

問3: どのような線形計画問題に対しても、その双対問題の双対問題は元の問題(主問題)に一致する事を証明せよ。