

数理手法III

(数理最適化) 第4回

線形計画問題の解法: 単体法

塩浦昭義

東京工業大学 経営工学系 准教授

shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

<http://www.me.titech.ac.jp/~shioura/shioura/teaching/TUmp17/index.html>

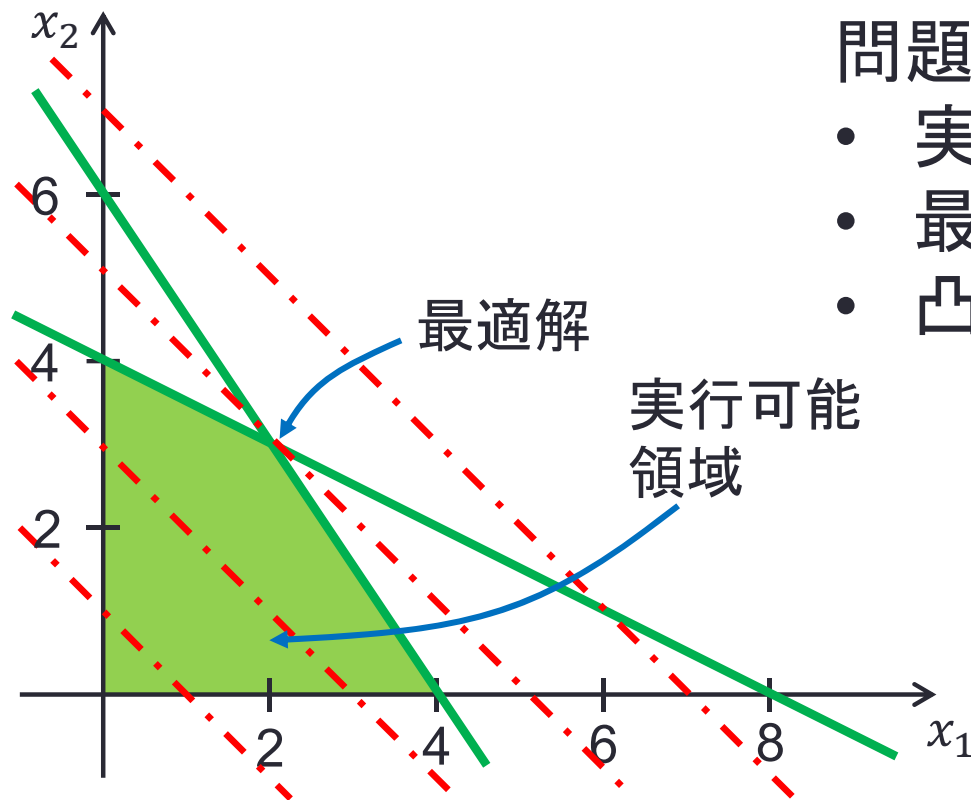


URL変更
しました

2変数の線形計画問題

例題

$$\begin{aligned} \text{目的関数: } & -x_1 - x_2 \rightarrow \text{最小化} \\ \text{制約条件: } & 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



問題を図示してわかること

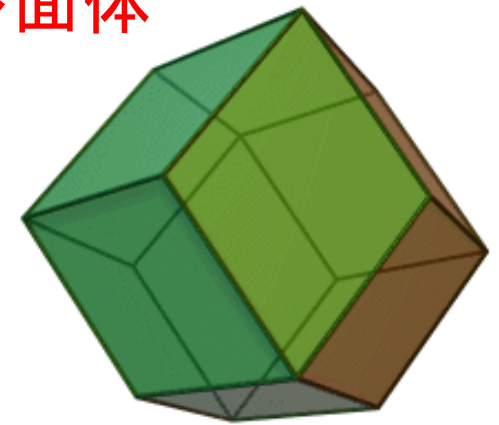
- 実行可能領域は平面上の**凸多角形**
- 最適解は凸多角形の境界に位置
- 凸多角形の**頂点の1つは最適解**

実行可能領域と最適解の性質

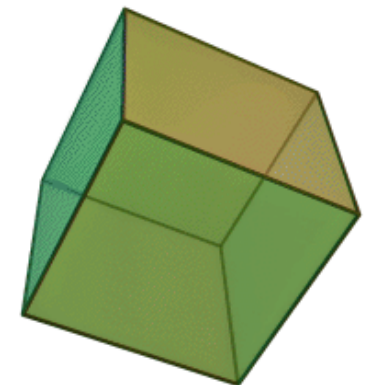
- 一般の n 変数の線形計画問題の場合
 - 実行可能領域は, n 次元実数空間における**凸多面体**
 - 凸多面体の**頂点の中に, 必ず最適解**が存在

→ 最適解を見つけるには, 実行可能領域の頂点を全て調べればよい!

- 単純なやり方で頂点を調べると, 指数時間が必要
 - 超立方体の場合, 頂点の数は 2^n 個
- 効率的に頂点を調べて最適解を見つける方法
 - **単体法**



<http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Rhombicuboctahedron.gif>



<http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/48/Hexahedron.gif>

単体法 (シンプレックス法)

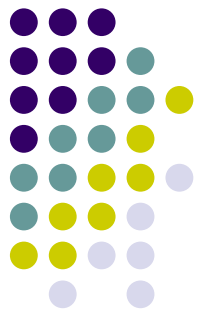
- 線形計画問題の最適解を求めるアルゴリズム
- G. B. Dantzig (1947)が提案
- 「ピボット操作」により, 「基底解」を繰り返し更新して, 最適解を求める

- 今日の残りの内容: 単体法の説明
 - 基底解
 - ピボット演算

大事なこと

△ 単体法のうごきを覚える

○ 問題の構造を理解し, 解法につなげる方法を知る



辞書(その1)

問題の変形

不等式標準形 \Rightarrow 一種の等式標準形

最小化 $c_1x_1 + \dots + c_nx_n$

条件 $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$

...

$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m$

$x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$

最小化 z

条件 $z = 0 + c_1x_1 + \dots + c_nx_n$

$x_{n+1} = -b_1 + a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n$

...

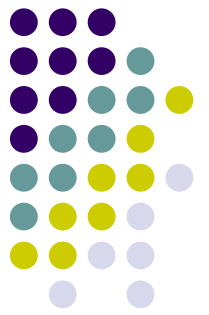
$x_{n+m} = -b_m + a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n$

$x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0,$

$x_{n+1} \geq 0, \dots, x_{n+m} \geq 0$

この等式制約のみで

問題を表現できる \rightarrow **辞書(dictionary)**



辞書(その2)

問題の変形

不等式標準形 \Rightarrow 一種の等式標準形

最小化 $-2x_1 - x_2 - x_3$

条件 $-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -4$

$$-2x_1 \quad - 4x_3 \geq -4$$

$$4x_1 - 3x_2 + x_3 \geq -1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

最小化 z

条件 $z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$

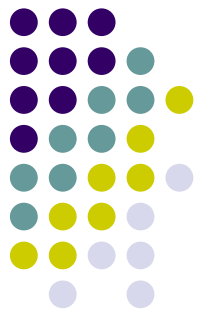
$$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$x_5 = 4 - 2x_1 \quad - 4x_3$$

$$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$$

$$x_1 \geq 0, \dots, x_6 \geq 0$$

辞書



辞書に関する用語

$$z = 0 + c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

$$x_{n+1} = -b_1 + a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n$$

...

$$x_{n+m} = -b_m + a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n$$

非基底変数
(nonbasic variable)
右辺の変数

基底変数 (basic variable): 左辺に表れる変数

基底解 (basic solution): 非基底変数を0としたときの解

(許容とは限らない)

$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$

$$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$x_5 = 4 - 2x_1 - 4x_3$$

$$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$$



基底解は(0,0,0,4,4,1)

基底解と非基底変数の関係

非基底変数の選び方に応じて、基底解は変わる
変数は n 個、非基底変数は $n-m$ 個

→ 非基底変数の組合せは ${}_n C_{n-m}$ 個 → ${}_n C_{n-m}$ 個の基底解

$$\begin{aligned} z &= -x_1 - x_2 \\ x_3 &= 12 - 3x_1 - 2x_2 \\ x_4 &= 8 - x_1 - 2x_2 \end{aligned}$$

2ページ目の
例題を
等式標準形
にしたもの

等式 $m = 2$ 個、変数 $n = 4$ 個

→ ${}_4 C_2 = 4 \times 3 / 2 = 6$ 個の基底解

基底 x_1, x_2 非基底 x_3, x_4 : $(2, 3, 0, 0)$

基底 x_1, x_4 非基底 x_2, x_3 : $(4, 0, 0, 4)$

基底 x_2, x_4 非基底 x_1, x_3 : $(0, 6, 0, -4)$

基底 x_1, x_3 非基底 x_2, x_4 : $(8, 0, -12, 0)$

基底 x_2, x_3 非基底 x_1, x_4 : $(0, 4, 4, 0)$

基底 x_3, x_4 非基底 x_1, x_2 : $(0, 0, 12, 8)$

2つは実行不可能、残りは実行可能

基底解と頂点の関係

実行可能な基底解は、実行可能領域の頂点に対応している

→ 実行可能な基底解の中に、必ず最適解が存在する

基底 x_1, x_2 非基底 x_3, x_4 : $(2, 3, 0, 0)$

基底 x_1, x_3 非基底 x_2, x_4 : $(8, 0, -12, 0)$

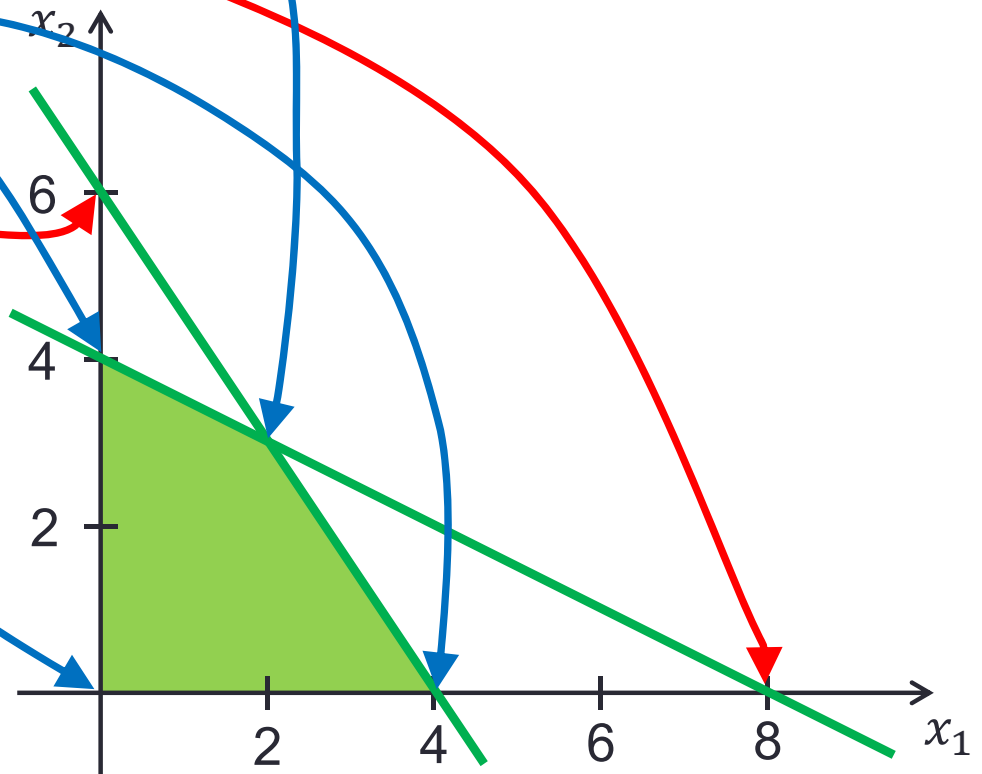
基底 x_1, x_4 非基底 x_2, x_3 : $(4, 0, 0, 4)$

基底 x_2, x_3 非基底 x_1, x_4 : $(0, 4, 4, 0)$

基底 x_2, x_4 非基底 x_1, x_3 : $(0, 6, 0, -4)$

基底 x_3, x_4 非基底 x_1, x_2 : $(0, 0, 12, 8)$

最適基底解:
最適な基底解のこと



辞書に関する用語(その2)



許容辞書(feasible dictionary):

対応する基底解が許容解の辞書
⇔ 基底解の各成分が非負

$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$

$$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$x_5 = 4 - 2x_1 - 4x_3$$

基底解 = (0, 0, 0, 4, 4)

⇒ 許容辞書

$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$

$$x_4 = -4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$x_5 = 4 - 2x_1 - 4x_3$$

基底解 = (0, 0, 0, -4, 4)

⇒ 許容辞書ではない

辞書の行列表現

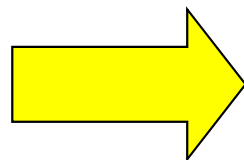


辞書の右辺の係数だけを書き出す

$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$

$$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$x_5 = 4 - 2x_1 - 4x_3$$



0	-2	-1	-1
4	-2	-2	1
4	-2	0	-4

ピボット操作

ピボット操作: 基底変数と非基底変数を1個ずつ入れ替えること
ピボット操作により, 基底解は「隣接する」基底解に変わる

基底 x_1, x_2 非基底 x_3, x_4 : $(2, 3, 0, 0)$

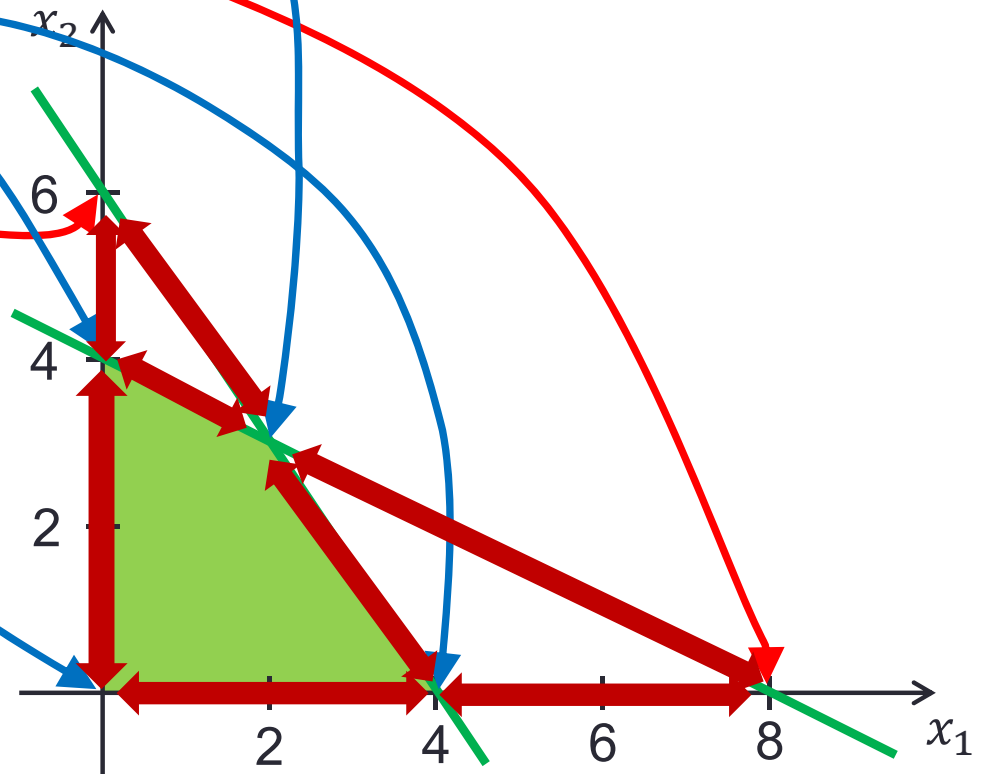
基底 x_1, x_3 非基底 x_2, x_4 : $(8, 0, -12, 0)$

基底 x_1, x_4 非基底 x_2, x_3 : $(4, 0, 0, 4)$

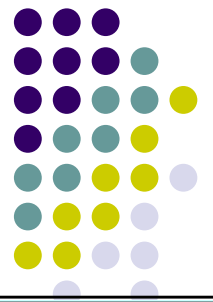
基底 x_2, x_3 非基底 x_1, x_4 : $(0, 4, 4, 0)$

基底 x_2, x_4 非基底 x_1, x_3 : $(0, 6, 0, -4)$

基底 x_3, x_4 非基底 x_1, x_2 : $(0, 0, 12, 8)$



基底解の更新方法:ピボット演算



ピボット演算(pivot operation): より良い基底解を得るための手順

許容辞書

$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$

$$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$x_5 = 4 - 2x_1 - 4x_3$$

$$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$$

基底解(0,0,0,4,4,1)

目的関数値 $z = 0$

解を変化させて z を減らしたい
 $\Rightarrow x_1$ の係数 < 0 なので
 x_1 を増やす

x_1 を α だけ増やすと

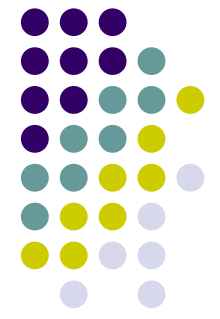
目的関数値 $z = -2\alpha$

解は

$(\alpha, 0, 0, 4 - 2\alpha, 4 - 2\alpha, 1 + 4\alpha)$

許容性を満たすためには $\alpha \leq 2$

ピボット演算(その2)



$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$

$$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$

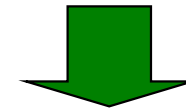
$$x_5 = 4 - 2x_1 - 4x_3$$

$$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$$

$x_1 = 0 \rightarrow 2$ とすると

解は $(2, 0, 0, 0, 0, 9)$, $z = -4$

とくに、基底変数 $x_4 = 4 \rightarrow 0$



基底と非基底の入れ替え

基底(x_1, x_5, x_6), 非基底(x_4, x_2, x_3)

$$z = -4 + x_4 + x_2 - 2x_3$$

$$x_1 = 2 - (1/2)x_4 - x_2 + (1/2)x_3$$

$$x_5 = 0 + x_4 + 2x_2 - 5x_3$$

$$x_6 = 9 - 2x_4 - 7x_2 + 3x_3$$

x_1 を基底に入れる

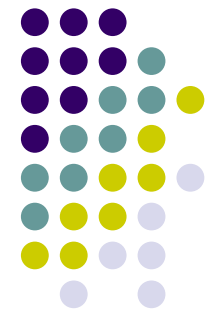
x_4 を基底から出す



辞書の書き換え

(ピボット演算終了)

ピボット演算2回目(その1)



$$z = -4 + x_4 + x_2 - 2x_3$$

z を減らしたい

⇒ x_3 の係数 < 0 なので
 x_3 を増やす

$$x_1 = 2 - (1/2)x_4 - x_2 + (1/2)x_3$$

$$x_5 = 0 + x_4 + 2x_2 - 5x_3$$

$$x_6 = 9 - 2x_4 - 7x_2 + 3x_3$$

x_3 を α だけ増やすと

基底解 $(2, 0, 0, 0, 0, 9)$

目的関数値 $z = -4 - 2\alpha$

目的関数値 $z = -4$

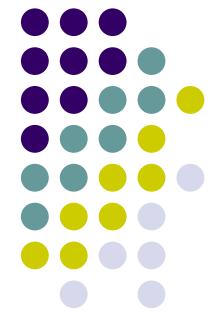
解は

$$(2 + (1/2)\alpha, 0, \alpha, 0, 0 - 5\alpha, 9 + 3\alpha)$$

許容性を満たすためには

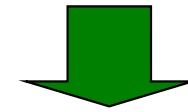
$$\alpha \leq 0$$

ピボット演算2回目(その2)



$$\begin{aligned} z &= -4 + x_4 + x_2 - 2x_3 \\ x_1 &= 2 - (1/2)x_4 - x_2 + (1/2)x_3 \\ x_5 &= 0 + x_4 + 2x_2 - 5x_3 \\ x_6 &= 9 - 2x_4 - 7x_2 + 3x_3 \end{aligned}$$

$x_3 = 0 \rightarrow 0$ とすると
解は $(2, 0, 0, 0, 0, 9)$, $z = -4$
とくに、基底変数 $x_5 = 0 \rightarrow 0$



基底と非基底の入れ替え

基底 (x_1, x_3, x_6) , 非基底 (x_4, x_2, x_5)

x_3 を基底に入れる

x_5 を基底から出す

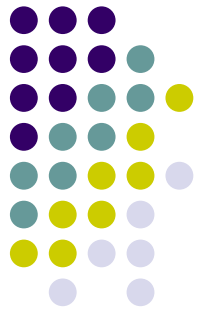


辞書の書き換え

(ピボット演算終了)

$$\begin{aligned} z &= -4 + (3/5)x_4 + (1/5)x_2 + (2/5)x_5 \\ x_1 &= 2 - (2/5)x_4 - (4/5)x_2 - (1/10)x_5 \\ x_3 &= 0 + (1/5)x_4 + (2/5)x_2 - (1/5)x_5 \\ x_6 &= 9 - (7/5)x_4 - (29/5)x_2 - (3/5)x_5 \end{aligned}$$

ピボット演算に関する用語



- 1回目のピボット演算

基底解 $(0,0,0,4,4,1) \rightarrow (2,0,0,0,0,9)$

非退化(nondegenerate): 基底解が変化する

- 2回目のピボット演算

基底解 $(2,0,0,0,0,9) \rightarrow (2,0,0,0,0,9)$

退化(degenerate): 基底解が変化しない

退化した基底解

非基底変数の選び方が違っていても、
同じ基底解が得られることがある ← **退化した基底解**と呼ぶ

$$\begin{aligned} Z &= -x_1 - x_2 \\ x_3 &= 12 - 3x_1 - 2x_2 \\ x_4 &= 4 - x_1 - 2x_2 \end{aligned}$$

基底 x_1, x_2 非基底 x_3, x_4 : $(4, 0, 0, 0)$

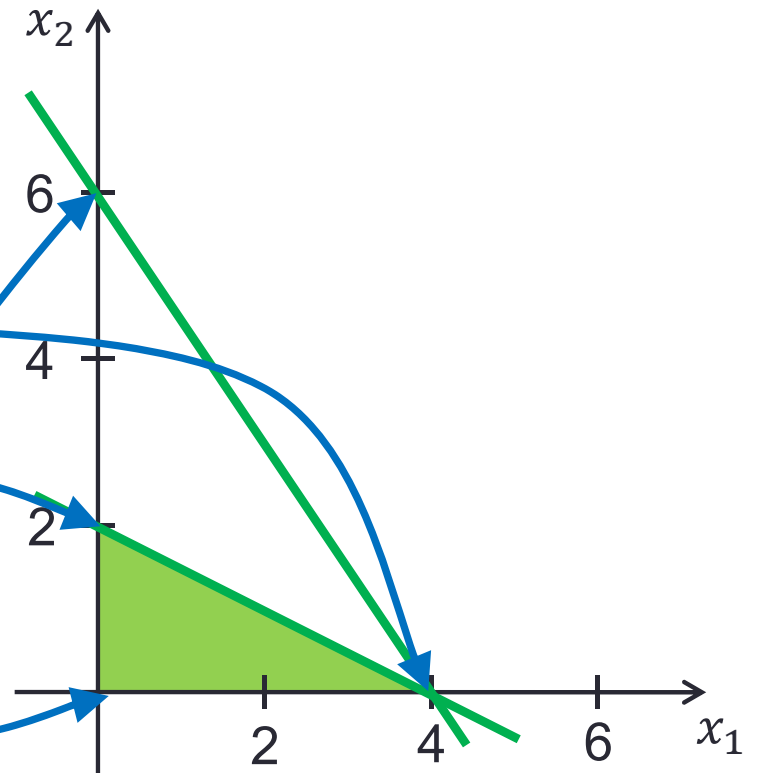
基底 x_1, x_3 非基底 x_2, x_4 : $(4, 0, 0, 0)$

基底 x_1, x_4 非基底 x_2, x_3 : $(4, 0, 0, 0)$

基底 x_2, x_3 非基底 x_1, x_4 : $(0, 2, 8, 0)$

基底 x_2, x_4 非基底 x_1, x_3 : $(0, 6, 0, -8)$

基底 x_3, x_4 非基底 x_1, x_2 : $(0, 0, 12, 4)$



最適性の判定



$$z = -4 + (3/5)x_4 + (1/5)x_2 + (2/5)x_5$$

$$x_1 = 2 - (2/5)x_4 - (4/5)x_2 - (1/10)x_5$$

$$x_3 = 0 + (1/5)x_4 + (2/5)x_2 - (1/5)x_5$$

$$x_6 = 9 - (7/5)x_4 - (29/5)x_2 - (3/5)x_5$$

z の式 of 非基底変数の係数がすべて非負



任意の許容解において x_4, x_2, x_5 は非負なので $z \geq -4$



現在の基底解 $(2, 0, 0, 0, 0, 9)$ は $z = -4$ なので最適解

非有界性の判定

現在の辞書

$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$

$$x_4 = 4 + 2x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$x_5 = 4 + 2x_1 - 4x_3$$

$$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$$

基底解(0,0,0,4,4,1)

目的関数値 $z = 0$

x_1 の係数 = $-2 < 0$ なので
 x_1 を増やす $\Rightarrow z$ が減る

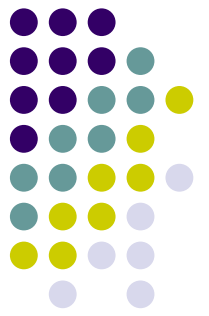
x_1 を α 増やすと

解は

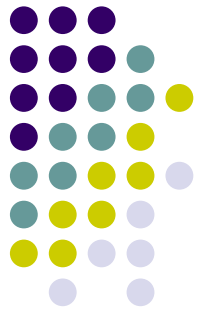
$$(\alpha, 0, 0, 4 + 2\alpha, 4 + 2\alpha, 1 + 4\alpha)$$

目的関数値 $z = -2\alpha$

α を任意に増やしても解は許容
 \Rightarrow 非有界



単体法の流れ



- **入力**: 許容辞書 (および基底)
- **出力**: 有界・非有界の判定。有界のときは最適解も。

ステップ1: 最適性判定

z の等式の右辺の係数が全て非負 \Rightarrow **最適解**
ある係数が負 \Rightarrow **基底に入る変数 x_s** にする

ステップ2: 非有界性判定、ピボット演算

変数 x_s をどれだけ増やせるか計算
無限に増やせる \Rightarrow **非有界**

それ以外 $\Rightarrow x_s$ を最大限増やしたときに0に減少する
基底変数を**基底から出る変数 x_t** にする

新しい基底に合わせて辞書を書き換え

レポート問題

問1: 右の線形計画問題の
基底解をすべて計算せよ.
また, 対応する基底変数,
非基底変数の組合せを書け.

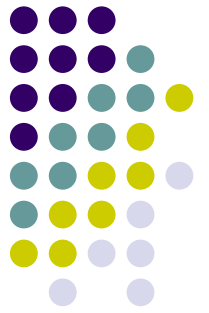
$$\begin{aligned} z &= -x_1 - x_2 \\ x_3 &= 12 - 3x_1 - 2x_2 \\ x_4 &= 12 - x_1 - 2x_2 \end{aligned}$$

問2: 右の線形計画問題に
ついて考える

- ① x_1, x_2 が基底変数の場合
- ② x_1, x_4 が基底変数の場合

それぞれの場合に対し, 対応する基底解が最適解か否かを
判定せよ. 授業で説明したやり方で判定すること.

$$\begin{aligned} z &= -x_1 - x_2 \\ x_3 &= 12 - 3x_1 - 2x_2 \\ x_4 &= \mathbf{8} - x_1 - 2x_2 \end{aligned}$$



レポート問題

問3: 右のLP(許容辞書)を単体法により解きなさい.

単体法の各反復における辞書, および基底から出る変数, 入る変数を明記すること

$$z = 0 - 5x_1 - 4x_2 - 3x_3$$

$$x_4 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3$$

$$x_5 = 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3$$

$$x_6 = 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3$$