数理手法III (数理最適化) 第8回

ネットワーク最適化
最大流問題と増加路アルゴリズム

塩浦昭義

東京工業大学 経営工学系 准教授

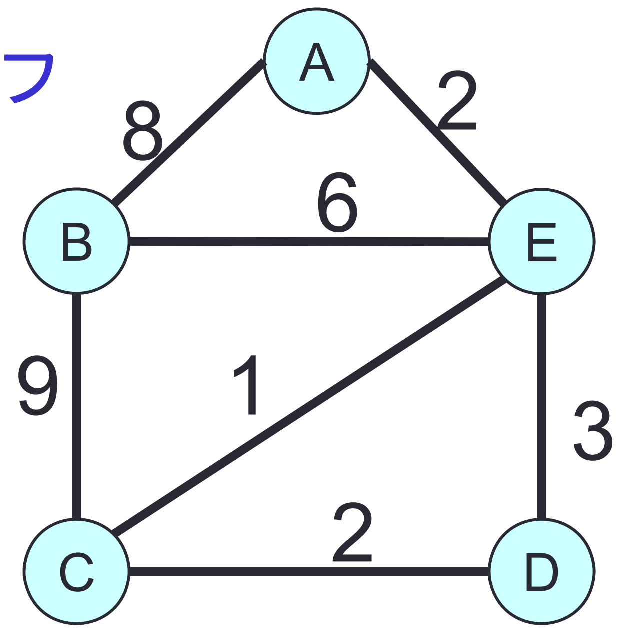
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

http://www.me.titech.ac.jp/~shioura/shioura/teaching/TUmp17/index.html

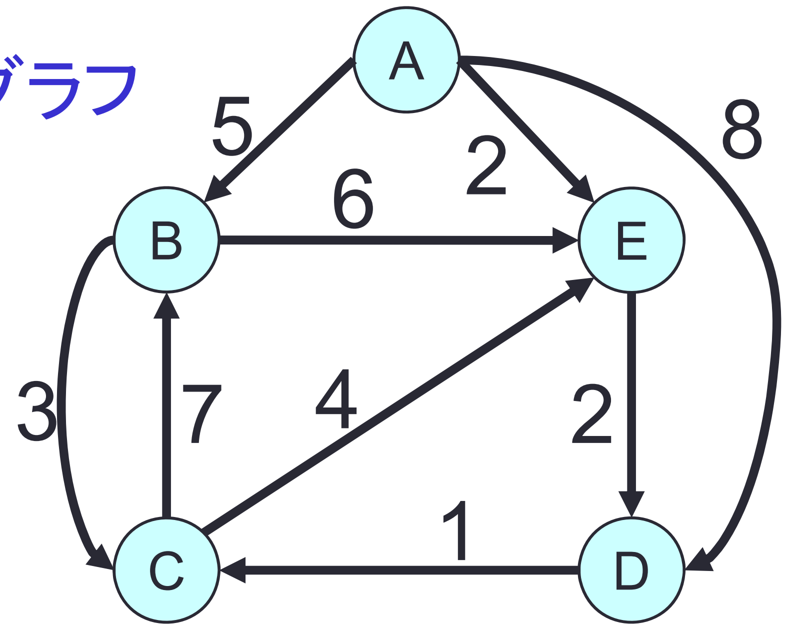
ネットワーク最適化問題

- (無向，有向)グラフ
  - 頂点(vertex，接点，点)が枝(edge，辺，線)で結ばれたもの
- ネットワーク
  - 頂点や枝に数値データ(距離，コストなど)が付加されたもの
- ネットワーク最適化問題
  - ネットワークを使って表現される数理計画問題

無向グラフ



有向グラフ



ネットワーク最適化問題の例

「ネットワーク」に関する数理最適化問題

最小木問題
(minimum spanning tree prob.)
最短路問題
(shortest path prob.)

アルゴリズムに関する講義で良く出てくる

最大流問題
(maximum flow prob.)
最小費用流問題
(minimum cost flow prob.)
割当問題
(assignment prob.)

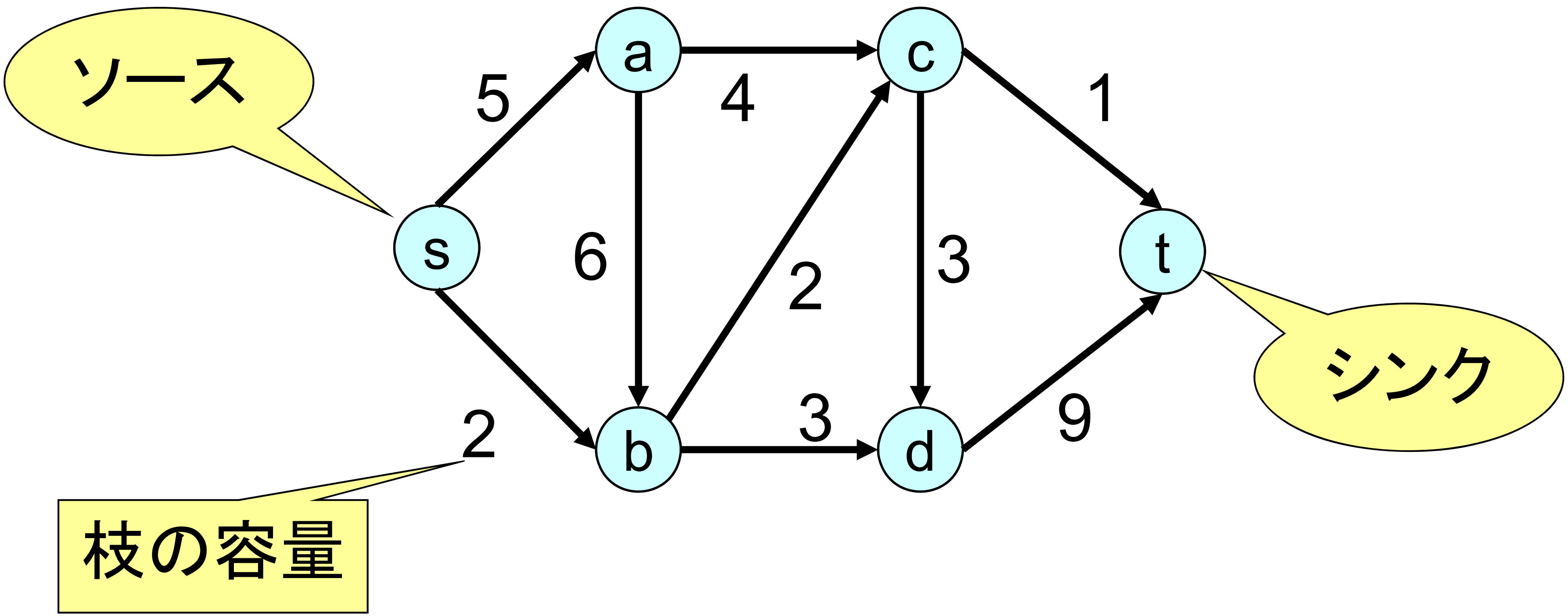
この授業で扱う

最大流問題の定義(その1)

入力 : 有向グラフ G = (V, E)

ソース(供給点) $s \in V$, シンク(需要点) $t \in V$

各枝 $(i, j) \in V$ の容量 $u_{ij} \geqq 0$

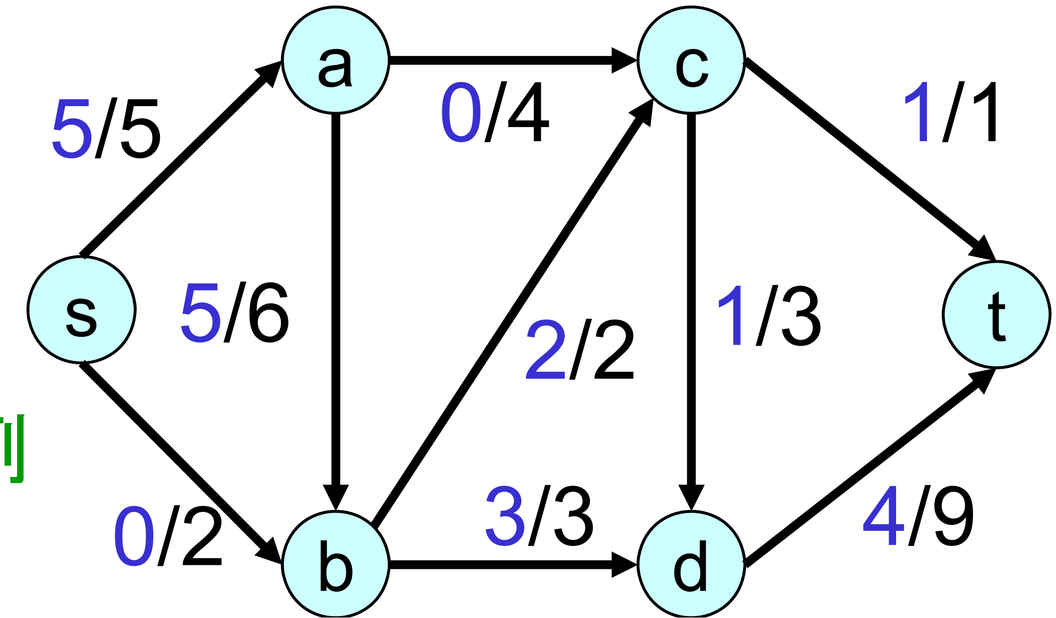


最大流問題の定義(その2)

目的:ソースからシンクに向けて，枝と頂点を経由して
「もの」を出来るだけたくさん流す

条件1(容量条件):
0 ≦ 各枝を流れる「もの」の量 ≦ 枝の容量

条件2(流量保存条件):
頂点から流れ出す「もの」の量＝ 流れ込む「もの」の量

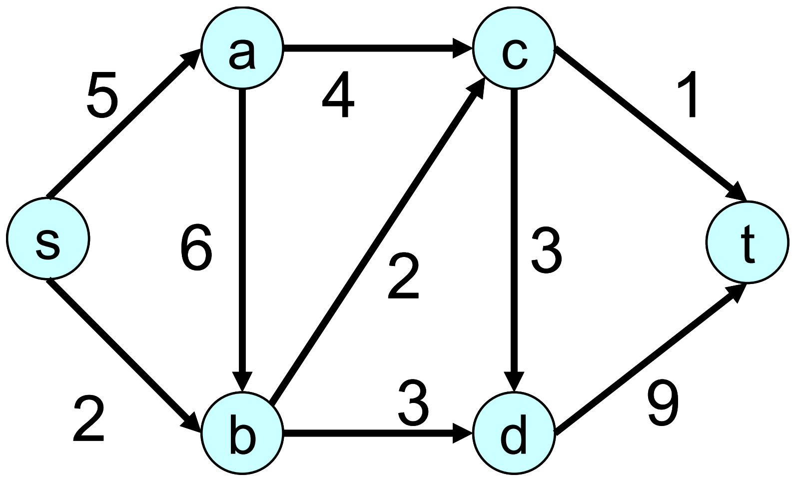


実行可能解の例

最大流問題の定式化:
変数, 目的関数と容量条件

変数 x_{ij}: フロー＝枝 (i, j) を流れる「もの」の量
変数 f: 総流量　＝ シンクに流れ込む「もの」の総量
　　　　　　　　＝ ソースから流れ出す「もの」の総量

目的:ソースからシンクに「もの」を出来るだけ多く流したい
⇒ 最大化 f
容量条件:0 ≦ 各枝を流れる「もの」の量 ≦ 枝の容量
⇒ $0 \leqq x_{ij} \leqq u_{ij}$　　($(i,j) \in E$)



最大化 f
容量条件:
$0 \leqq x_{sa} \leqq 5$, $0 \leqq x_{sb} \leqq 2$, $0 \leqq x_{ab} \leqq 6$,
$0 \leqq x_{ac} \leqq 4$, $0 \leqq x_{bc} \leqq 2$,
…

最大流問題の定式化: 流量保存条件

流量保存条件:

(頂点から流れ出す「もの」の量) − (流れ込む「もの」の量) ＝ 0

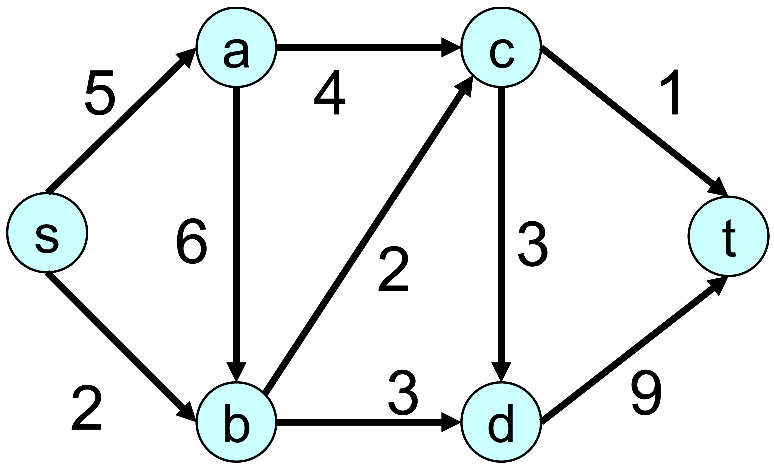
⇒ $\sum\{x_{kj} \mid$ 枝 (k,j) は 頂点 k から出る$\}$

$- \sum\{x_{ik} \mid$ 枝 (i,k) は 頂点 k に入る$\}$ ＝ 0 $(k \in V - \{s, t\})$

ソースとシンクに関する条件:

$\sum\{x_{sj} \mid$ (s,j) は s から出る$\}$ - $\sum\{x_{is} \mid$ (i,s) は s に入る$\}$ = f

$\sum\{x_{tj} \mid$ (t,j) は t から出る$\}$ - $\sum\{x_{it} \mid$ (i,t) は t に入る$\}$ = - f



流量保存条件の例:

$x_{ac} + x_{ab} - x_{sa} = 0$

$x_{bc} + x_{bd} - x_{ab} - x_{sb} = 0$

$x_{ct} + x_{cd} - x_{ac} - x_{cb} = 0$

$x_{dt} - x_{cd} - x_{bd} = 0$

$x_{sa} + x_{sb} = f$, $- x_{ct} - x_{dt} = - f$

最大流問題の定式化：まとめ

最大化　f

条件　$0 \leqq x_{ij} \leqq u_{ij}$　　((i,j) ∈ E)

$\sum\{x_{kj}$ | (k,j) は k から出る$\}$ − $\sum\{x_{ik}$ | (i,k) は k に入る$\}$ = 0

(k : s, t 以外の頂点)

$\sum\{x_{sj}$ | (s,j) は s から出る$\}$ − $\sum\{x_{is}$ | (i,s) は s に入る$\}$ = f

$\sum\{x_{tj}$ | (t,j) は t から出る$\}$− $\sum\{x_{it}$ | (i,t) は t に入る$\}$ = - f

この問題の実行可能解 x_{ij} --- 実行可能フロー

総流量が最大の実行可能フロー --- 最大フロー

最大流問題の応用例

- 物流
- シーズン途中でのプロ野球チームの優勝可能性判定
  - 残り試合全勝しても優勝の可能性がないかどうか？
- 画像処理における物体の切り出し
  - 画像内の物体のみ取り出す
- その他多数

最大流問題の解法

最大流問題は線形計画問題の特殊ケース

⇒　単体法で解くことが可能

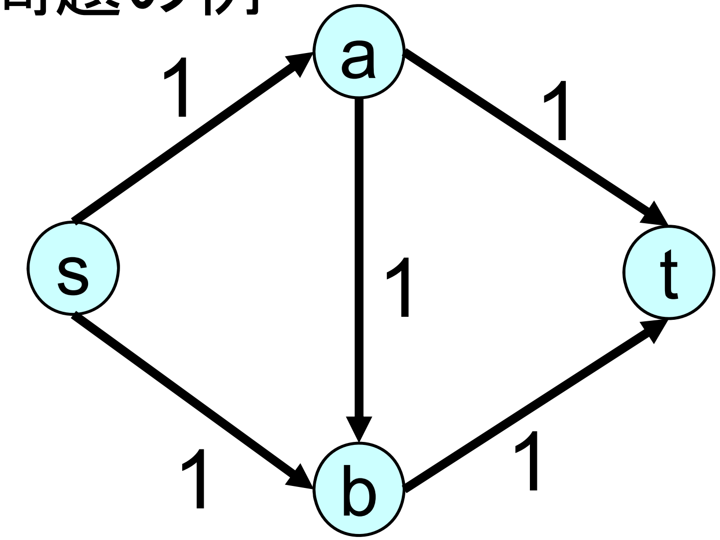
最大流問題は良い（数学的な）構造をもつ

⇒　この問題専用の解法（増加路アルゴリズムなど）

を使うと，より簡単＆より高速に解くことが可能

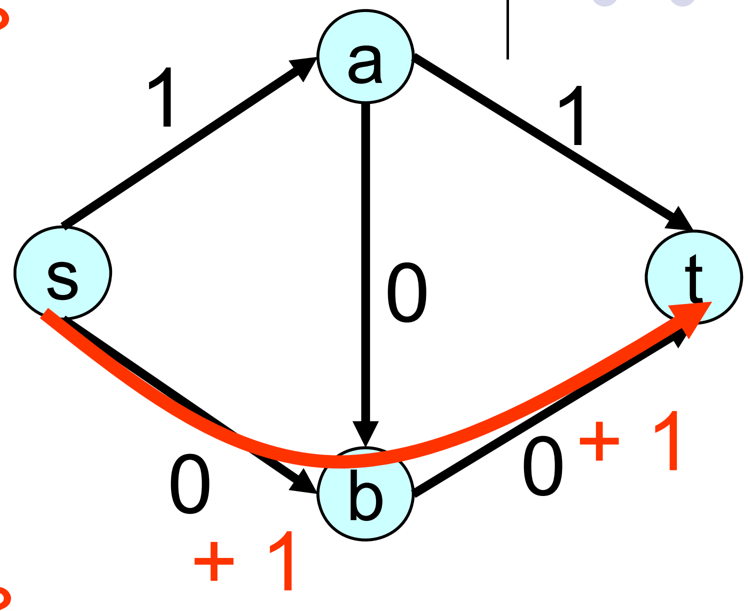
最大フローの判定

問題の例



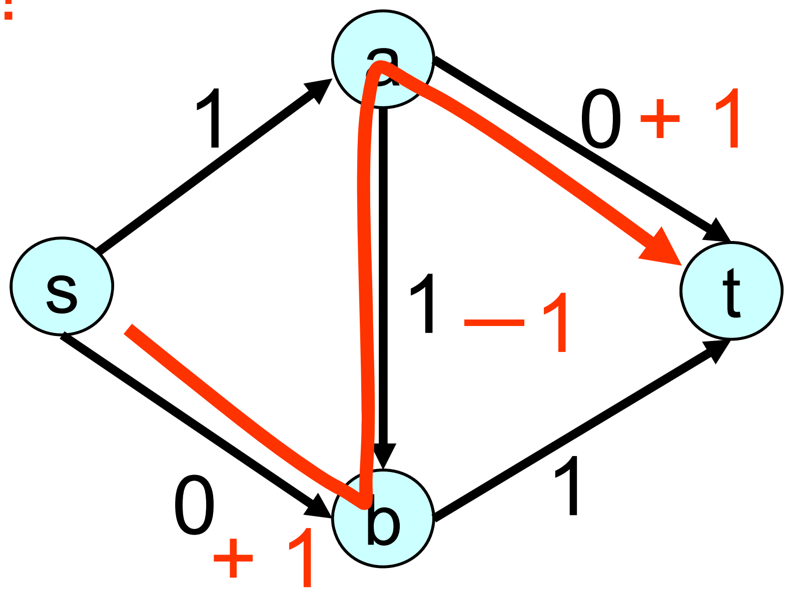
フロー例1：最大？

最大ではない



フロー例2：最大？

最大ではない



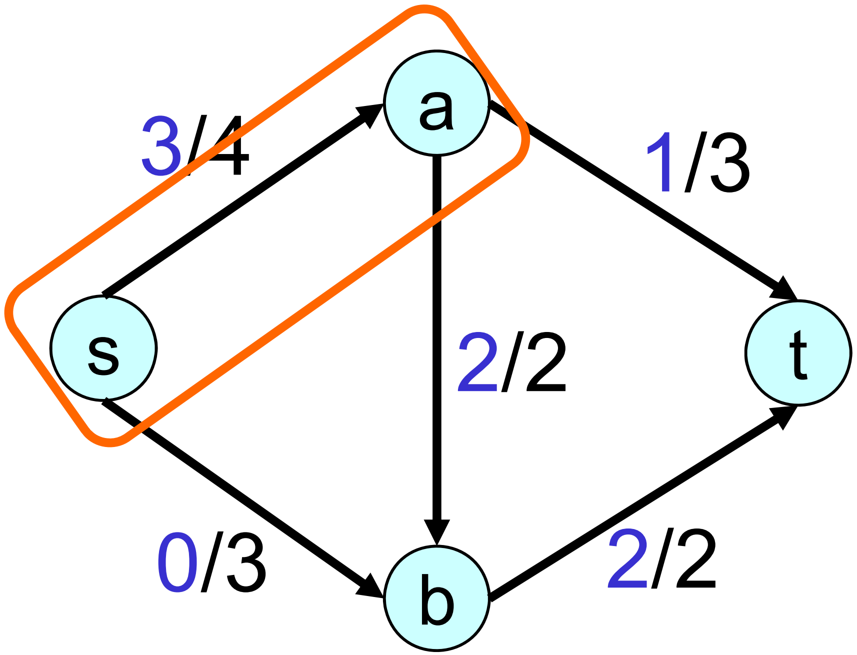
最大フローであることの判定を

効率よく行うには？

⇒ 残余ネットワークを利用

残余ネットワークの定義

残余ネットワークの作り方

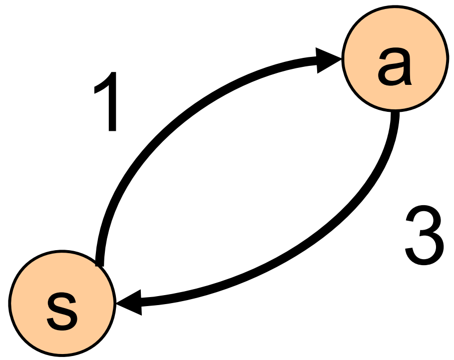


問題例とフロー

各枝のデータは

(フロー量/容量)

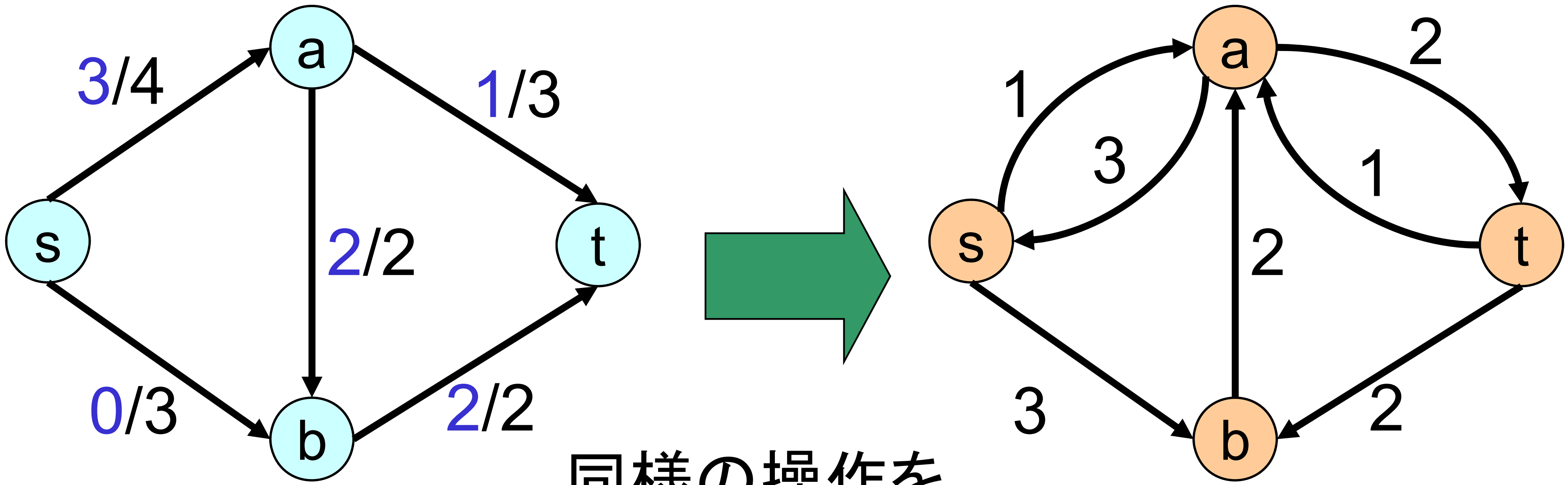
枝(s,a)において
☆さらに4－3＝1だけフロー
を流せる
⇒　残余ネットワークに
容量1の枝(s,a)を加える



☆現在のフロー3を逆流させて
0にすることが出来る
⇒　容量3の枝(a,s)を加える

残余ネットワークの定義

残余ネットワークの作り方



問題例とフロー

同様の操作を
各枝に行う

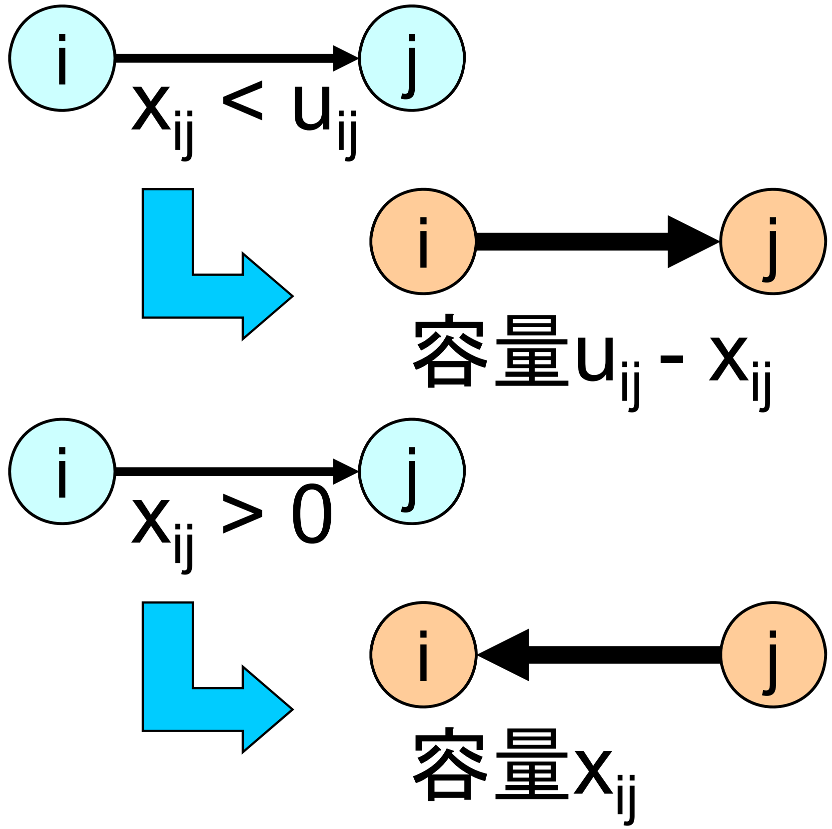
残余ネットワーク
の完成

残余ネットワークの定義(まとめ)

$x = (x_{ij} \mid (i,j) \in E)$: 現在のフロー

フロー x に関する残余ネットワーク $G^x = (V, E^x)$

$E^x = F^x \cup R^x$



順向きの枝集合

$F^x = \{ (i, j) \mid (i, j) \in E, x_{ij} < u_{ij} \}$

各枝の容量 $u^x_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$

逆向きの枝集合

$R^x = \{ (j, i) \mid (i, j) \in E, x_{ij} > 0 \}$

各枝の容量 $u^x_{ji} = x_{ij}$

注意！: 現在のフローが変わると残余ネットワークも変わる

残余ネットワークに関する定理

増加路：残余ネットワークでの
　　　ソース s からシンク t へのパス（路・みち）

定理１：残余ネットワークに 増加路が存在する
➔ 現在のフローの総流量は増加可能

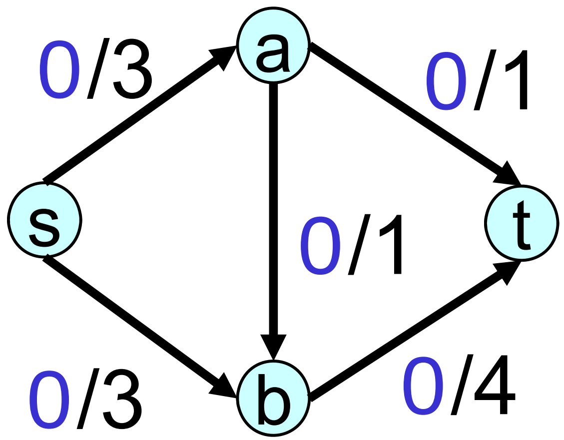
定理２：残余ネットワークに 増加路が存在しない
➔ 現在のフローは最大フロー

定理1の例

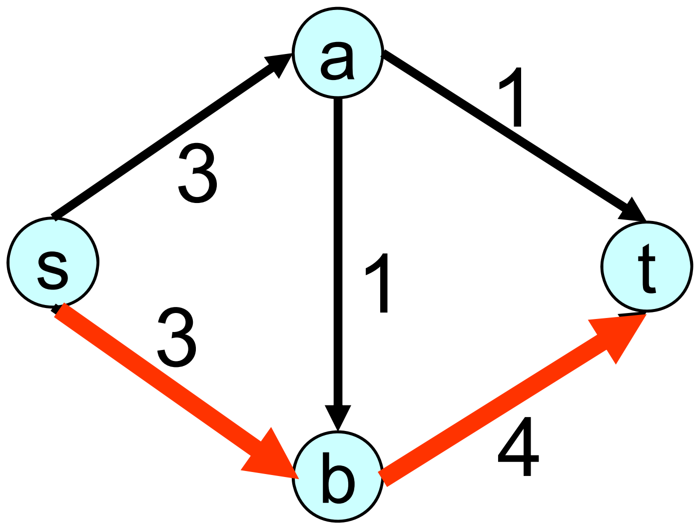
定理１：残余ネットワークに増加路が存在する
➔ 現在のフローの総流量は増加可能

証明：増加路（s-tパス）を使うと，本当に総流量を増加できる

現在のフローx

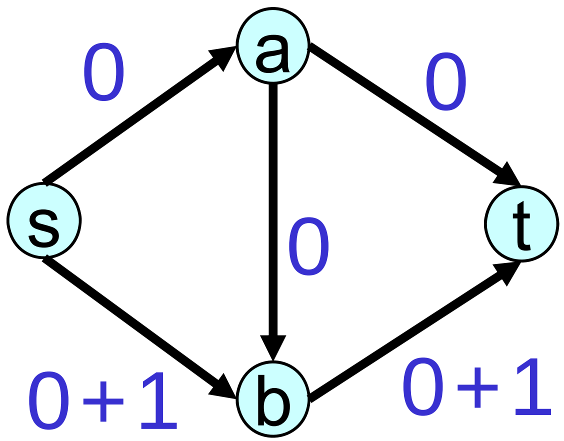


残余ネットワーク



増加路が存在

新しいフローx’



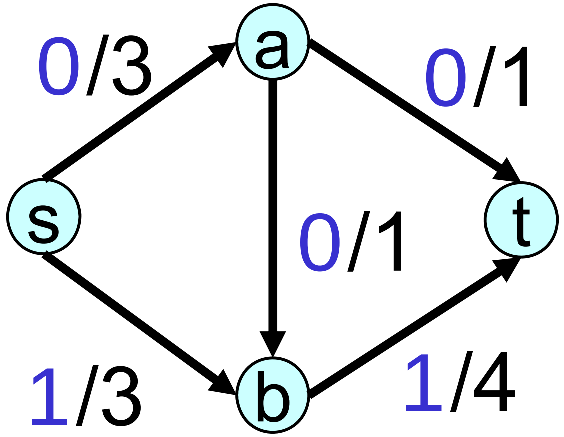
総流量が
１増えた

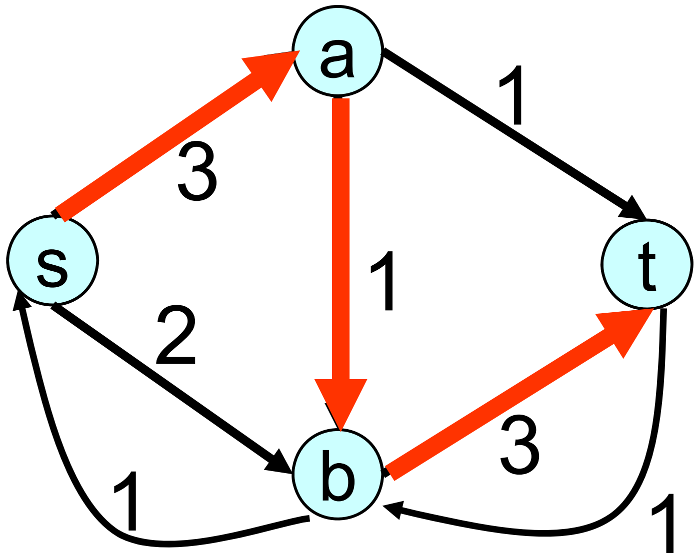
定理1の例

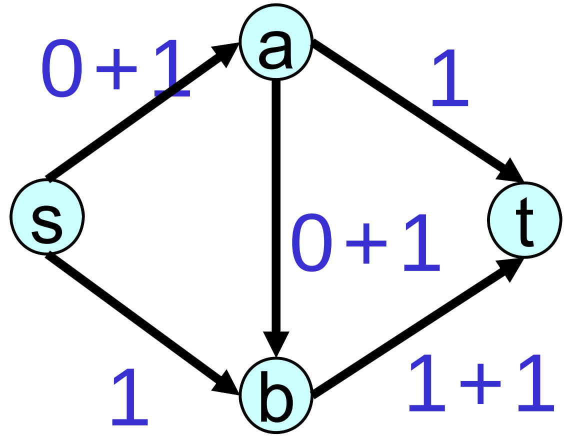
現在のフローx

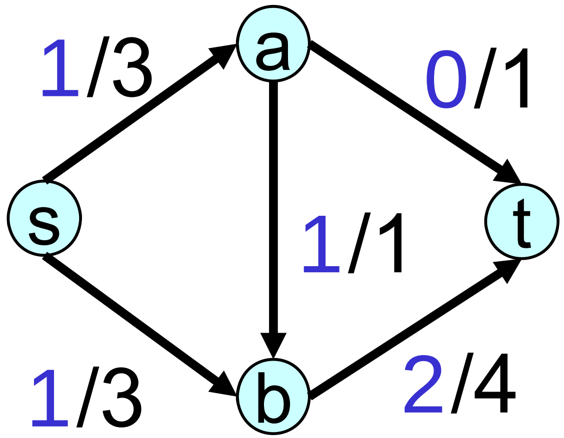
残余ネットワーク

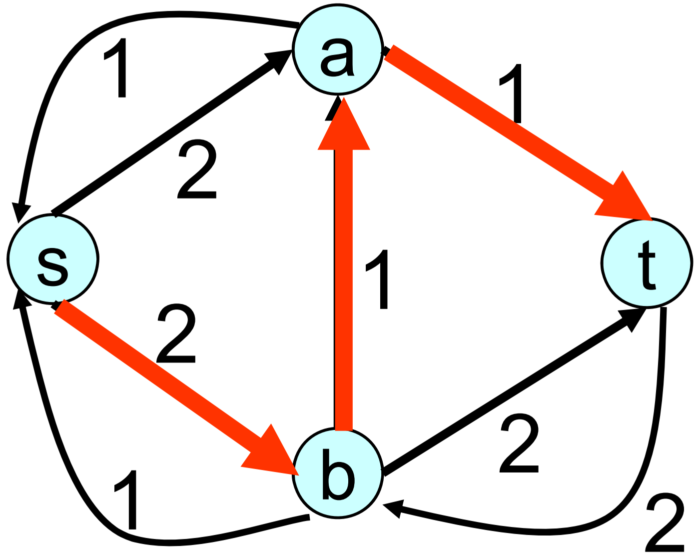
新しいフローx’

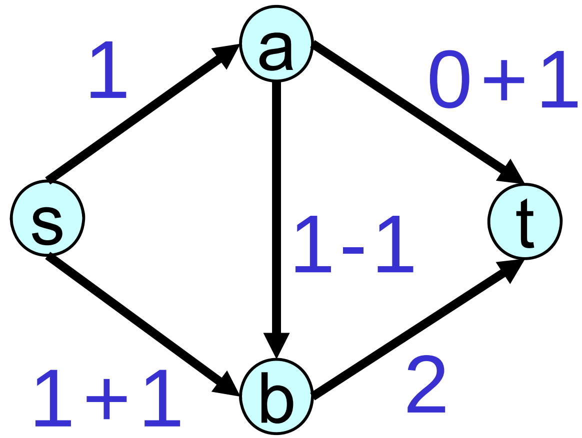








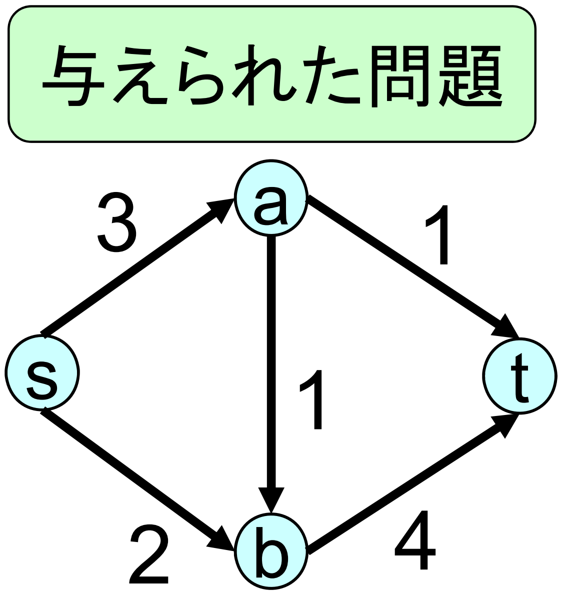


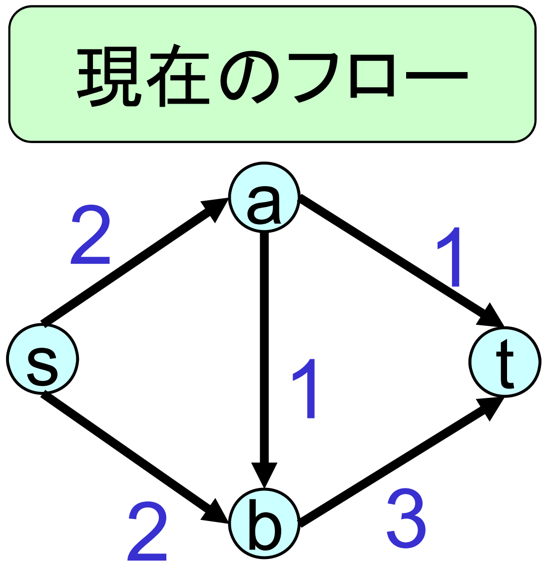


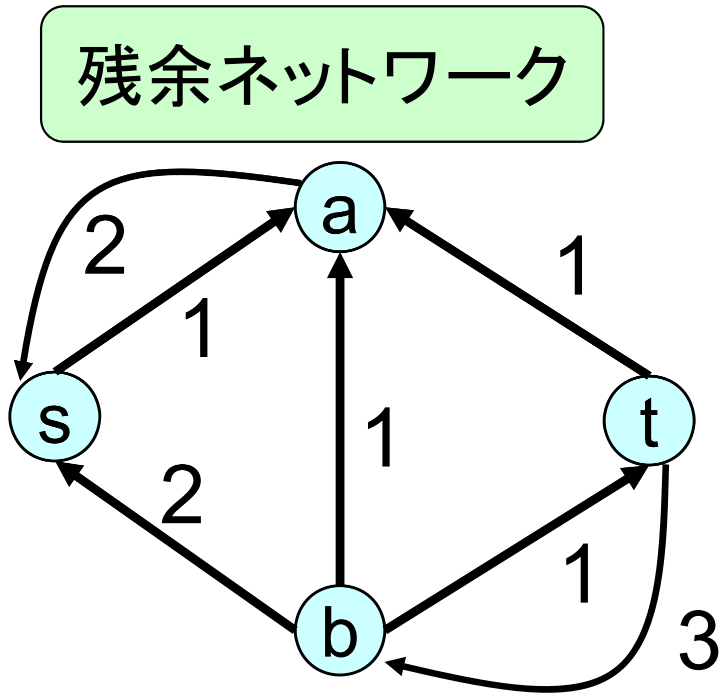
定理2の例

定理2：残余ネットワークに s-t パスが存在しない
➔ 現在のフローは最大フロー

証明は次回







s-t パスがない
➔現在のフローは最適！

増加路アルゴリズム

最大フローを求めるアルゴリズム

ステップ0：初期の実行可能フローとして，
全ての枝のフロー量を0とする

ステップ1：現在のフローに関する残余ネットワークを作る

ステップ2：残余ネットワークに 増加路が存在しない ⇒ 終了

ステップ3：残余ネットワークの増加路をひとつ求め，
それを用いて現在のフローを更新する

ステップ4：ステップ1へ戻る

増加路アルゴリズムの計算時間

※各枝の容量は整数と仮定

U = 容量の最大値

m = 枝の数，n = 頂点の数

各反復において総流量が1以上増加

➔反復回数 ≦ 総流量の最大値 ≦ m U

各反復での計算時間

＝ 残余ネットワークの増加路を求める時間

➔深さ優先探索，幅優先探索などを使うと O(m + n) 時間

∴ 計算時間は O((m+n) m U)

（入力サイズは m + n + log U なので，指数時間）

増加路アルゴリズムの改良

反復回数を少なくしたい

➔ 各反復での増加路の選び方を工夫する

（改良法１）各反復での総流量の増加量を大きくする

➔各反復で容量最大の増加路を選ぶ

➔反復回数 O(m log (n U)), 計算時間 $O(m^2 \log (n U))$

（改良法2）各反復で最短（枝数最小）の増加路を選ぶ

➔反復回数 O(m n), 計算時間 $O(m^2 n)$

※この他にも，増加路アルゴリズムの計算時間を短縮するための様々なテクニックが存在

全く違うアイディアのアルゴリズム：「プリフロー」を利用

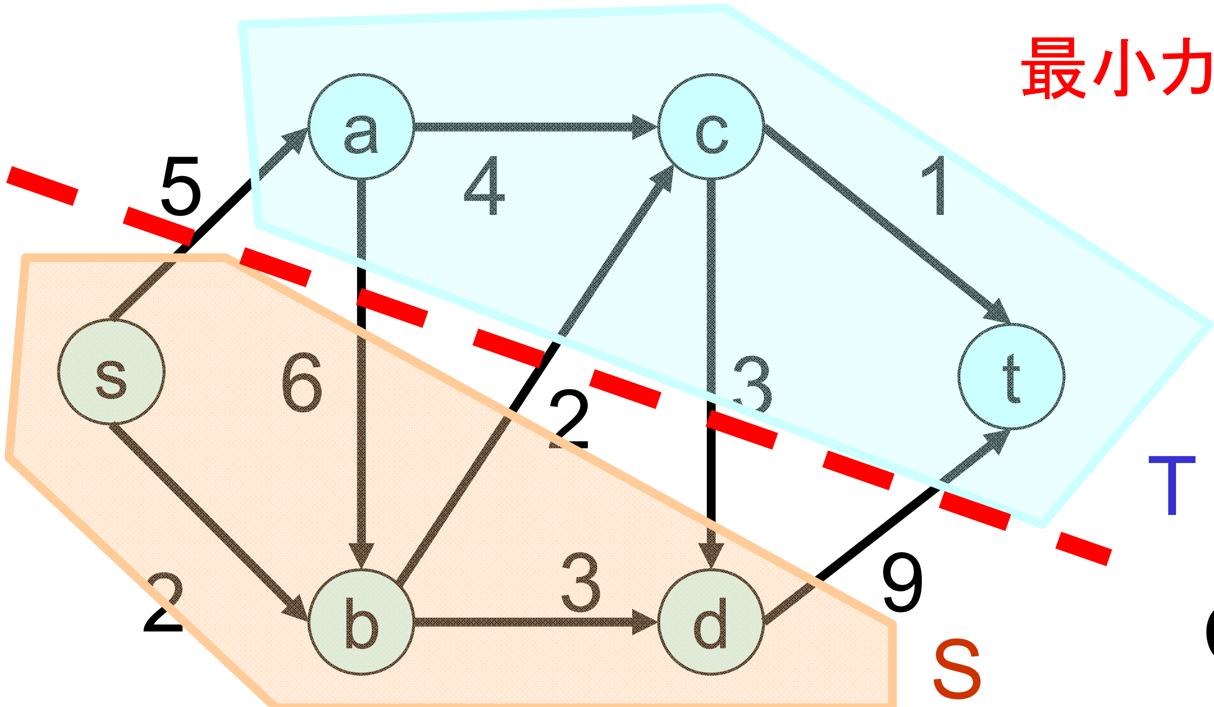
カット

フローを流すとき，ネットワークのボトルネックはどこ？

カット (S, T): S, T は頂点集合Vの分割（$S \cap T = \emptyset, S \cup T = V$）
S はソース s を含む，Tはシンク t を含む

カット (S, T) の容量C(S,T) ＝ SからTへ向かう枝の容量の和

最小カット：容量が最小のカット



C(S,T)=5+2+9=16

カットの性質(その1)

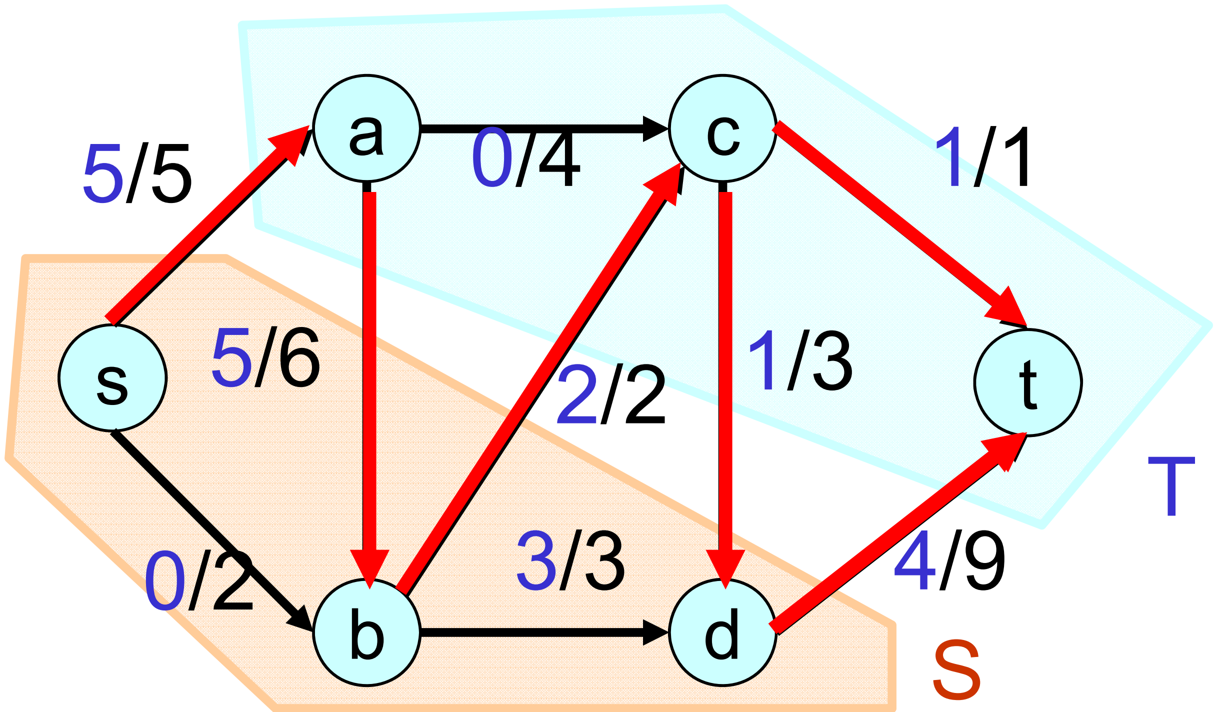
性質1：

任意のカット(S, T) と任意の実行可能フロー (x_{ij} | (i,j) ∈ E) に対し

SからTへの枝のフローの和 x(S,T)

ー TからSへの枝のフローの和 x(T,S)

＝ フローの総流量 f



f = 1 + 4 = 5

x(S, T) = 5 + 2 + 4 = 11

x(T, S) = 5 + 1 = 6

f = 11 – 6 = 5

カットの性質(その1)

一般の場合の証明: 下記の制約式を足し合わせる

$\sum\{x_{kj} \mid (k,j)$ は k から出る$\}$
$\quad - \sum\{x_{ik} \mid (i,k)$ は k に入る$\} = 0 \qquad (k \in S - \{s\})$

$\sum\{x_{sj} \mid (s,j)$ は s から出る$\} - \sum\{x_{is} \mid (i,s)$ は s に入る$\} = f$

左辺の和をとる

SからTへの枝 の変数 x_{ij} は係数が＋1

TからSへの枝 の変数 x_{ij} は係数が－1

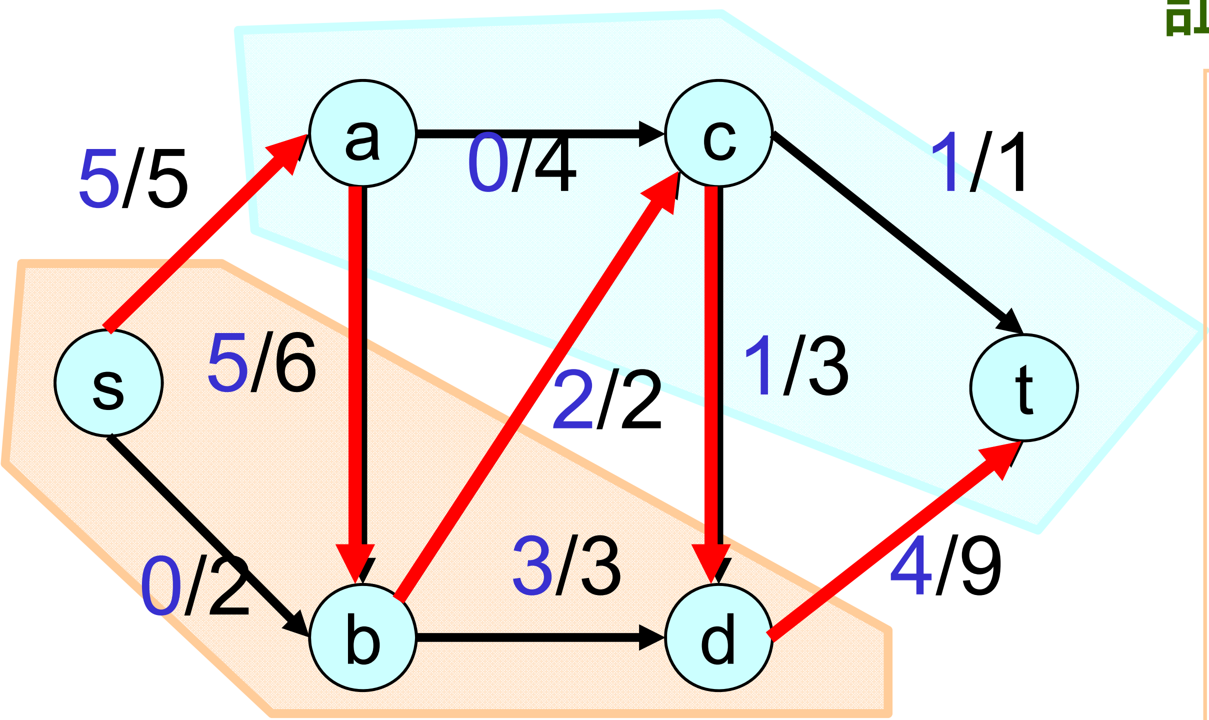
SからSへの枝 の変数 x_{ij} は打ち消される

TからTへの枝 の変数 x_{ij} は登場しない

$\Rightarrow$ 左辺＝ $x(S, T) - x(T, S)$

カットの性質(その2)

性質2：任意のカット(S, T) とフロー $(x_{ij} \mid (i,j) \in E)$ に対し
フローの総流量 f ≦ カットの容量 C(S,T)



f = 5 ≦ 16 = C(S, T)

証明:

$f = x(S, T) - x(T,S)$
（性質1）

$x(S, T) \leqq C(S, T)$
（容量条件）

$x(T, S) \geqq 0$
（フローは非負）

$\therefore f \leqq C(S, T) - 0$
$= C(S, T)$

最小カット問題

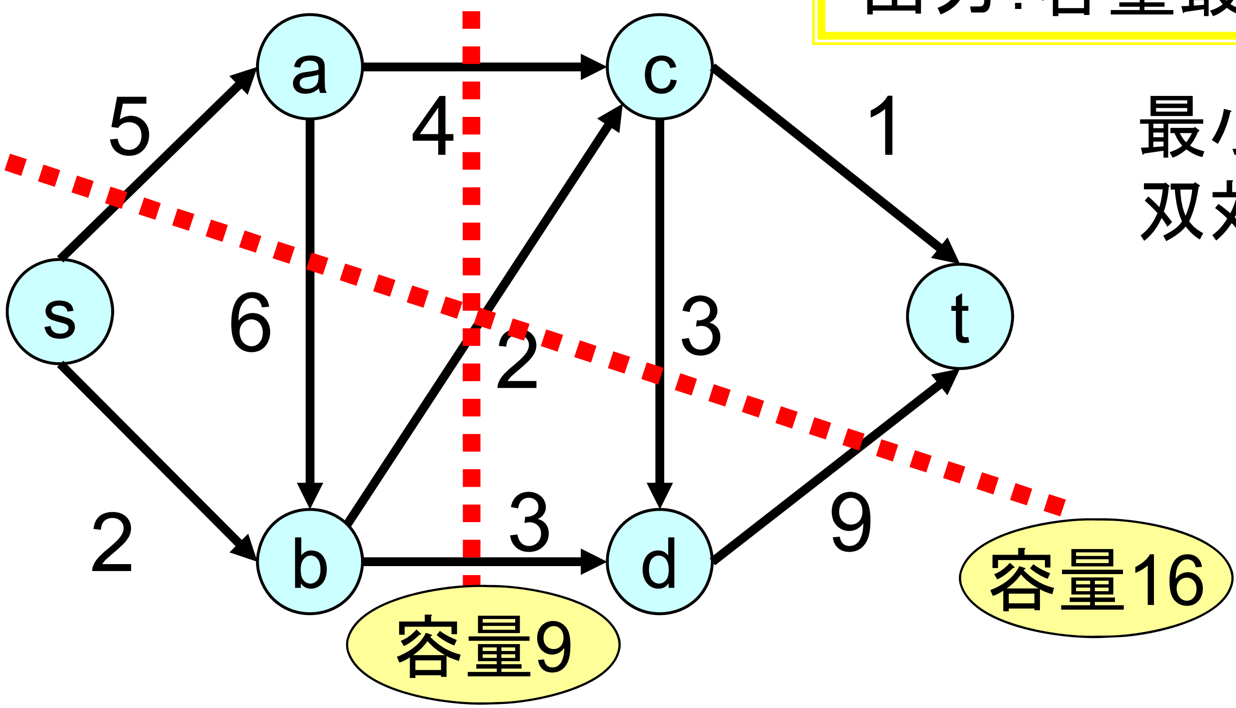
性質2：任意のカットとフローに対し
フローの総流量 ≦ カットの容量

LPの弱双対定理に対応

⇒ カットの容量は，最大フローの総流量に対する上界

より良い上界を求めたい⇒

最小カット問題
入力：グラフ G = (V, E), 頂点 s, t ∈V
出力：容量最小の s-t カット（最小カット）



最小カット問題は最大流問題の双対問題

演習問題

問1：次の2つの最大流問題に対する定式化を書きなさい

問2：次の2つの最大流問題に対して，増加路アルゴリズムで最大流を求めよ（各反復での残余ネットワークやフローを省略せずに書くこと）

問3：2つのグラフの最小カット（と思われるカット）を求めよ（頑張って探してみてください）