問 1：$(x_1, x_2) = (1,2)$における二次のテイラー近似を求めなさい（ log の底は 2 とする）

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 \log_2 x_2 - x_2 \log_2 x_1$$
$$= (x_1 \log_e x_2 - x_2 \log_e x_1)/\log_e 2$$

$$\nabla f_1(x_1, x_2) = \frac{1}{\log_e 2}\begin{bmatrix} \log_e x_2 - \frac{x_2}{x_1} \\ \frac{x_1}{x_2} - \log_e x_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\log_e 2}\begin{bmatrix} \log_e 2 - 2 \\ 0.5 \end{bmatrix},$$

$$Hf_1(x_1, x_2) = \frac{1}{\log_e 2}\begin{bmatrix} \frac{x_2}{x_1^2} & \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \\ \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} & -\frac{x_1}{x_2^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\log_e 2}\begin{bmatrix} 2 & -0.5 \\ -0.5 & -0.25 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{f}_1(1,2) = f_1(1,2) + \nabla f_1(1,2)^T \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \end{bmatrix}^T \mathrm{H} f_1(1,2)\begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \end{bmatrix}$$

$$= 1 + \frac{1}{\log_e 2}\begin{bmatrix} \log_e 2 - 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \end{bmatrix}$$
$$+ \frac{1}{2\log_e 2}\begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & -0.5 \\ -0.5 & -0.25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \end{bmatrix}$$

問 1： $(x_1, x_2) = (1,2)$における二次のテイラー近似を求めなさい

$$f_2(x_1,\ x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$$

$$\nabla f_2(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix},\ Hf_2(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{f_2}(1,2) = f_2(1,2) + \nabla f_2(1,2)^T \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \end{bmatrix}^T \mathrm{H} f_2(2,1) \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \end{bmatrix}$$

$$= 4 + 2(x_1 - 1) + 4(x_2 - 2) + (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 1$$

問１：$(x_1, x_2) = (1{,}2)$における二次のテイラー近似を求めなさい

$$f_3(x, y) = x^2 - xy + 2y^2 - 2x + e^{x+y}$$

$$\nabla f_3(x, y) = \begin{bmatrix} 2x - y - 2 + e^{x+y} \\ -x + 4y + e^{x+y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + e^3 \\ 3 + e^3 \end{bmatrix},$$

$$Hf_3(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2 + e^{x+y} & -1 + e^{x+y} \\ -1 + e^{x+y} & 4 + e^{x+y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + e^3 & -1 + e^3 \\ -1 + e^3 & 4 + e^3 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{f}_3(1{,}2) = f_3(1{,}2) + \nabla f_3(1{,}2)^T \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \end{bmatrix}^T \mathrm{H}f_3(1{,}2) \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \end{bmatrix}$$

後はこれを計算すればよい

問２：関数$f(x,y)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}y^3+2y^2$について考える

(a) 勾配ベクトルとヘッセ行列を計算せよ.

(b) すべての停留点（勾配ベクトルがゼロの点）を求めよ.

さらに，2次の最適性条件（十分条件）を用いて，極小解を求めよ.

$$\nabla f(x,y)=\begin{bmatrix} x^3-x \\ y^2+4y \end{bmatrix},\ Hf(x,y)=\begin{bmatrix} 3x^2-1 & 0 \\ 0 & 2y+4 \end{bmatrix}$$

よって停留点は

$x^3-x=x(x+1)(x-1)=0,\ \ y^2+4y=y(y+4)=0$の解すべて

➔停留点は (-1,-4), (-1,0), (0, -4), (0, 0), (1, -4), (1,0)

これらの点でのヘッセ行列を計算すると，それぞれ

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

ヘッセ行列が正定値なのは(-1,0), (1,0) のとき

これらの点は極小解である

問3： 対称な2×2行列 A に対し、次の関係を証明せよ。

Aは半正定値 ⇔ $a_{11} \geqq 0$, $a_{22} \geqq 0$, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \geqq 0$

[🡐の証明]

行列Aが半正定値🡐🡒任意の$x = (x_1, x_2)$に対して

$$x^T Ax = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 \geq 0$$

- $a_{11} \neq 0$のとき:

$$x^T Ax = a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2\right)^2 + \frac{1}{a_{11}}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)x_2^2$$

$\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2\right)^2$, x_2^2 は常に非負であり,

$a_{11} \geq 0$, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \geq 0$ が成り立つので, $x^T Ax \geq 0$ が成立

- $a_{22} \neq 0$のとき: 上と同様にして証明できる.
- $a_{11} = a_{22} = 0$のとき: $x^T Ax = 2a_{12}x_1x_2$

  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -a_{12}^2 \geq 0$より$a_{12} = 0$

  よって $x^T Ax = 0$ が成立

問3：対称な2×2行列 A に対し、次の関係を証明せよ。

A は半正定値 ⇔ $a_{11} \geqq 0,\ a_{22} \geqq 0,\ a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \geqq 0$

[➔の証明]

行列Aが半正定値⇔任意の$x = (x_1, x_2)$に対して

$$x^T A x = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 \geq 0$$

- $(x_1, x_2) = (1,0)$を代入：$x^T A x = a_{11} \geq 0$ 成立
- $(x_1, x_2) = (0,1)$を代入：$x^T A x = a_{22} \geq 0$ 成立
- $a_{11} > 0$のとき，$(x_1, x_2) = (a_{12}, -a_{11})$を代入：
  $x^T A x = a_{11}a_{12}^2 + a_{22}a_{11}^2 - 2a_{11}a_{12}^2 = a_{11}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) \geq 0$
  よって $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \geq 0$ が成立.
- $a_{22} > 0$のとき，$(x_1, x_2) = (-a_{22}, a_{12})$を代入：
  $x^T A x = a_{11}a_{22}^2 + a_{22}a_{12}^2 - 2a_{22}a_{12}^2 = a_{22}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) \geq 0$
  よって $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \geq 0$ が成立.
- $a_{11} = a_{22} = 0$のとき，$(x_1, x_2) = (1, \pm 1)$を代入：
  $x^T A x = \pm 2a_{12} \geq 0$ より $a_{12} = 0$
  よって $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ が成立.