経営経済数学
第１回

ユークリッド空間の位相（１）

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

この講義の目的

- 経営工学系で必要となる基礎的な数学について学ぶ
  「経営・経済のための基礎数理」
  ➔「経営・経済数学」➔「数理工学」

- ここで学んだことが必要になる研究室は多い

- 在学中に使わなくても，将来使う可能性があるかも

授業で教えること

宮川，水野，矢島（著）「経営工学の数理(1)」，朝倉書店

7.　ユークリッド空間の位相

7.1　ユークリッド空間

7.2　内部，外部，境界

7.3　部分集合の閉包

7.4　開集合と閉集合

7.5　開集合系と閉集合系

8.　距離空間と位相空間

8.1　距離空間

(8.2　位相空間)

8.3　点列の収束

8.4　連続写像

9.　点列と連続関数の性質

9.1　コーシー列

9.2　部分列

9.3　連続関数の最小値

11.　凸集合と凸関数

11.1　凸集合

11.2　凸結合

11.3　超平面と半空間

11.4　凸関数

11.5　凸関数と最適化

授業の進め方

- 授業資料はT2SCHOLAにあります
  - 試験の過去問等もおいてあります
- 授業の最初に，前回の演習問題の解説
- 授業の途中で休憩を入れる予定
- 授業終了後に演習問題を解いてもらう
  - 任意でレポートとして提出

成績評価：試験の合計点が60点以上で合格

- 中間試験, 期末試験　配点 50点程度 x 2
  - 中間，期末の出来がそれぞれ40％以下の場合は不合格

- 毎回のレポート(1回当たり3点程度)
  - 得点調整に利用（主に試験が不合格の時）

レポートに関する注意事項

- レポート提出は義務ではなく，任意.
- 問題の解答が不完全でも良いので，なるべく提出すること
- 他人のレポートとほぼ同一，または他の文献の丸写し(剽窃)は単位不可などのペナルティを科す
  - 他の学生との相談可．ただし, レポートは自分のことばで書く
  - 本などを参考にした場合は参考文献情報を書く
- レポートの提出方法
  - T2SCHOLAを使って提出．pdf形式限定
  - 手書きレポートの場合
    - スキャナもしくはスキャナアプリでスキャン.
  - PCで作成したレポートの場合
    - pdf形式に変換して提出.

7.　ユークリッド空間の位相

7.1　ユークリッド空間
7.2　内部，外部，境界
7.3　部分集合の閉包
7.4　開集合と閉集合
7.5　開集合系と閉集合系

やりたいこと
- 平面や(3次元)空間における距離，内部，外部等の概念の一般化
- 開集合，閉集合の概念

➔ 8章以降の議論で使う
　8章で扱う距離空間の特殊な場合

参考文献：　志賀浩二，位相への30講，朝倉書店(1988)

ユークリッド空間の定義

※この授業では，基本的にベクトルを太字にしません

- $\mathbb{R}$: 実数の集合
- $\mathbb{R}^2$: 平面上の点（ベクトル）集合
  - $x, y \in \mathbb{R}^2$ の距離 $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$
- $\mathbb{R}^3$: 空間上の点（ベクトル）集合
  - $x, y \in \mathbb{R}^3$ の距離 $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$

このように,

実数ベクトル全体の集合 ＋ 距離の情報 ➔ ユークリッド空間

n 次元ユークリッド空間

＝n 次元実ベクトル集合 $\mathbb{R}^n$ とそれらの距離

- $x, y \in \mathbb{R}^n$ の距離 $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$
- $x \in \mathbb{R}^n$ の長さ（ノルム） $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}$

距離の性質

任意のベクトル$x, y, z \in \mathbb{R}^n$ に対して

(i) $d(x, y) \geq 0$

(ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(iii) [対称性] $d(x, y) = d(y, x)$

(iv) [三角不等式] $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

(i), (ii), (iii) は簡単に示せる.

(iv) はコーシー・シュワルツの不等式を使う

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2$$

左辺－右辺＝二乗和≧ 0 となる

※ (i) は(ii), (iii), (iv)から導くことが可能.

距離の性質 (iv) の証明

(iv) [三角不等式] $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$
右辺^2 − 左辺^2 ≧0 を示せば良い.

$$\left(d(x,y) + d(y,z)\right)^2$$

$$= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - z_i)^2}\right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(y_i - z_i)^2$$

$$+2\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i - z_i)^2\right)}$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(y_i - z_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)(y_i - z_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left((x_i - y_i) + (y_i - z_i)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 = d(x,z)^2$$

不等号はコーシー・シュワルツの不等式より

内部，外部，境界の導入

- 平面や3次元空間の集合に対し，
  その内部，外部，境界は絵に描けば分かる
- n次元空間の集合は絵に描けないが，
  n次元空間の集合に対しても，
  内部，外部，境界を厳密に定義したい
- 定義するために，球体を使う
- 球体を定義するために，距離を使う

球体，球面

定義： 半径 $r > 0$，中心 $x \in \mathbb{R}^n$ の(開)球体((open) ball)

$$B(x,r) \equiv \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(y,x) < r\}$$

n=1→開区間，n=2→円の内部，n=3→球の内部

定義： 半径 $r > 0$，中心 $x \in \mathbb{R}^n$ の閉球体(closed ball)

$$\{y \in \mathbb{R}^n \mid d(y,x) \leq r\}$$

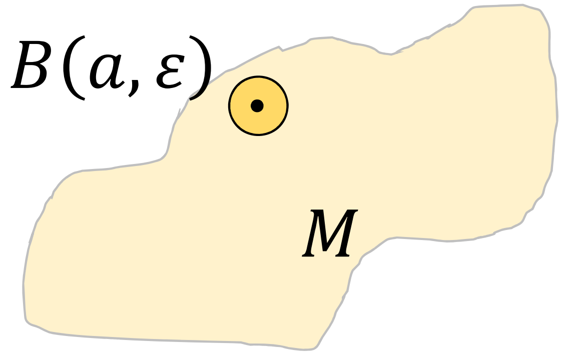
定義： 半径 $r > 0$，中心 $x \in \mathbb{R}^n$ の球面(sphere)

$$\{y \in \mathbb{R}^n \mid d(y,x) = r\}$$

内点，内部

定義： $a \in \mathbb{R}^n$ は集合 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ の内点(interior point)
⟺ ある $\varepsilon > 0$ に対し，$B(a, \varepsilon) \subseteq M$

※定義より，Mの内点∈M



定義： 集合 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ の内部(interior) M^i
＝Mの内点すべての集合

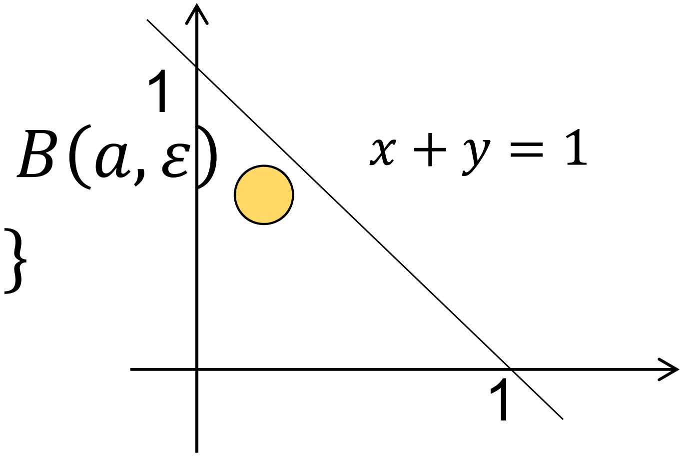
内点，内部

定義： $a \in \mathbb{R}^n$ は集合 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ の内点(interior point)

$\Leftrightarrow$ ある $\varepsilon > 0$ に対し，$B(a, \varepsilon) \subseteq M$

定義： 集合 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ の内部(interior) M^i

＝Mの内点すべての集合



例：$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y < 1, x \geq 0, y \geq 0\}$

- a=(0.6,0.2) は内点

 ε =0.1 とすれば,

 $B(a, \varepsilon) \subseteq \{(x, y) | 0.5 < x < 0.7, 0.1 < y < 0.3\} \subseteq M$

- a=(0.4,0.5) は内点 ε =0.01 とすればOK
- a=(0.5,0.5) は内点ではない

 任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$(0.5,0.5) \in B(a, \varepsilon) \setminus M \neq \emptyset$

外点，外部

定義： $a \in \mathbb{R}^n$ は集合 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ の外点(exterior point)

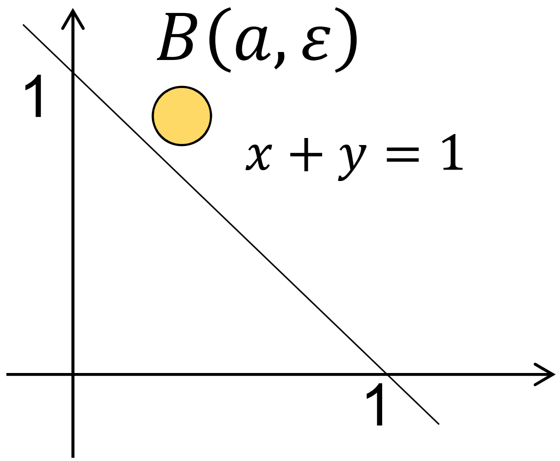
⟺ ある $\varepsilon > 0$ に対し，$B(a,\varepsilon) \cap M = \emptyset$

⟺ M の補集合の内点

※ $M \subseteq \mathbb{R}^n$の補集合(complement)$= \mathbb{R}^n \setminus M$

定義： 集合 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ の外部(exterior) M^e

$= M$の外点すべての集合



例：$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x+y<1, x \geq 0, y \geq 0\}$

- a=(0.6,0.5) は外点

ε =0.05 とすれば，$(x,y) \in B(a,\varepsilon)$ に対してすべて $x+y>1$

$\therefore B(a,\varepsilon) \cap M = \emptyset$

- a=(0.5,0.5) は外点ではない． 任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$\big(0.5(1-\varepsilon/2)), 0.5(1-\varepsilon/2)\big) \in B(a,\varepsilon)$ なので$B(a,\varepsilon) \cap M = \emptyset$

内部と外部の関係

命題： 集合 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ の内部 M^i と外部 M^e は共通部分をもたない

（証明の概略）

ある点 $a \in \mathbb{R}^n$ が内点であり，かつ外点であると仮定

→ 内点と外点の定義より，矛盾が生じる．

命題： 集合 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ に対し，

M の補集合の内部＝ M の外部

M の補集合の外部＝ M の内部

（証明の概略）内部，外部，補集合の定義より．

境界

定義： $a \in \mathbb{R}^n$ は集合 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ の境界点(boundary point)

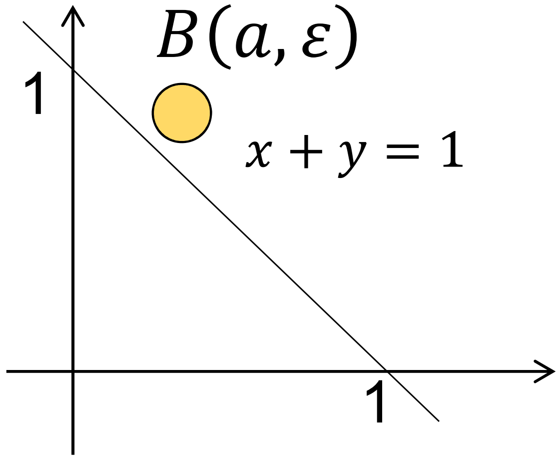
⇔ M の内点でも外点でもない

⇔任意の $\varepsilon > 0$ に対し,

$$B(a,\varepsilon) \cap M \neq \emptyset \text{ かつ } B(a,\varepsilon) \setminus M \neq \emptyset$$

定義： 集合 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ の境界(boundary) M^b

＝Mの境界点すべての集合



例：$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x+y < 1, x \geq 0, y \geq 0\}$

- a=(0.5,0.5) は境界点
- a=(0,0.5)は境界点

境界の性質

定義： $a \in \mathbb{R}^n$ は集合 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ の境界点

$\Leftrightarrow$ M の内点でも外点でもない

定義： 集合 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ の境界 M^b ＝Mの境界点すべての集合

命題：任意の集合 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ に対し,

M^i, M^e, M^b のいずれの２つも共通部分をもたない

$M^i \cup M^e \cup M^b = \mathbb{R}^n$

（∵内部と外部は共通部分をもたない & 境界の定義）

命題：任意集合 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ に対し，Ｍの補集合の境界＝Ｍの境界

（∵ Ｍの補集合の内部（外部）＝Ｍの外部（内部））

触点と閉包

定義： $a \in \mathbb{R}^n$ は集合 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ の触点(adherent point)

$\Leftrightarrow$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$B(a, \varepsilon) \cap M \neq \emptyset$

- Mの触点 ＝ M に任意に近い点

  ＝ M との距離 $d(a, M) = \inf\{d(a, x) | x \in M\}$ が0の点
- $a \in M$ ならば $a \in B(a, \varepsilon) \cap M$ なので触点

定義： 集合 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ の閉包(closure) $\overline{M}$

＝M の触点すべての集合

命題： $a \in \mathbb{R}^n$は集合 M の触点$\Leftrightarrow$ 集合 M の内点または境界点

つまり$\overline{M} = M^i \cup M^b$

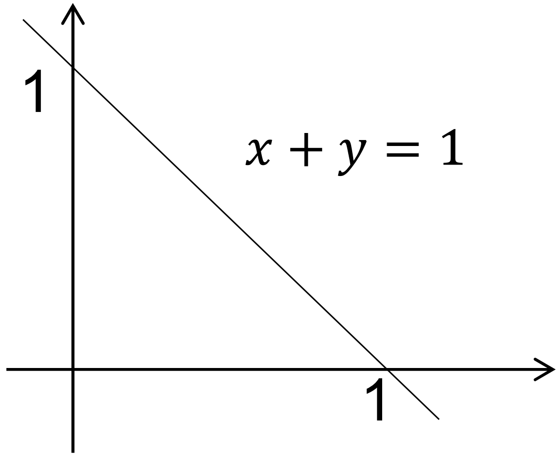
（証明の概略）「内点または境界点 $\Leftrightarrow$ 外点ではない」より．

触点と閉包

定義： $a \in \mathbb{R}^n$ は集合 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ の触点(adherent point)

⟺ 任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$B(a, \varepsilon) \cap M \neq \emptyset$

定義： 集合 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ の閉包(closure) $\overline{M}$＝Mの触点すべての集合



- $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y < 1, x \geq 0, y \geq 0\}$

$\overline{M}$= M の不等号をすべて等号付きに置き換えたもの

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$

- M =有理数全体$\mathbb{Q}$ のとき，　$M^i = \emptyset, M^e = \emptyset, M^b = \mathbb{R}$

よって有理数全体$\mathbb{Q}$の閉包＝実数全体 $\mathbb{R}$

※一般に，　$\overline{M} = X$ が成り立つとき，M は X において稠密(dense) という　　← X の中に M の要素がつまっている

演習問題 （提出は次回授業日の11:59まで）

問1：数学における「定義」と「定理」の意味を書きなさい.
（文献やWebページを調べた場合はその出典を明記すること）

問2：（昨年の中間試験より）以下では集合$M \subseteq \mathbb{R}^2$を

$$M \ = \{ (x, y) \mid x > 0,\ y > 0,\ y \leq 1/x\}$$

と定義する．任意の実数$x \geq 0$に対し，点$(x, 0)$がMの触点となることを，触点の定義に基づいて証明せよ（x=0の場合を含むことに注意）.

問3：以下の集合それぞれに対し，内部，外部，境界，閉包を求めなさい.

$M_1 = \mathbb{R}^3$，$M_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0\}$,

$M_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{または} x \geq 2\}$