経営経済数学

コーシー列と部分列

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

コーシー列

単調増加列，単調減少列

- **定義**： 数列$a_1, a_2, a_3, \ldots$は
  - 単調増加（非減少） ⇔ $\forall k = 1,2,\cdots$： $a_k < a_{k+1}$ $(a_k \leq a_{k+1})$
  - 単調減少（非増加） ⇔ $\forall k = 1,2,\cdots$： $a_k > a_{k+1}$ $(a_k \geq a_{k+1})$
  - 上に有界 ⇔ ある実数 q が存在して，
    任意の k=1,2,... に対して $q \geq a_k$
  - 下に有界 ⇔ ある実数 q が存在して，
    任意の k=1,2,... に対して $q \leq a_k$

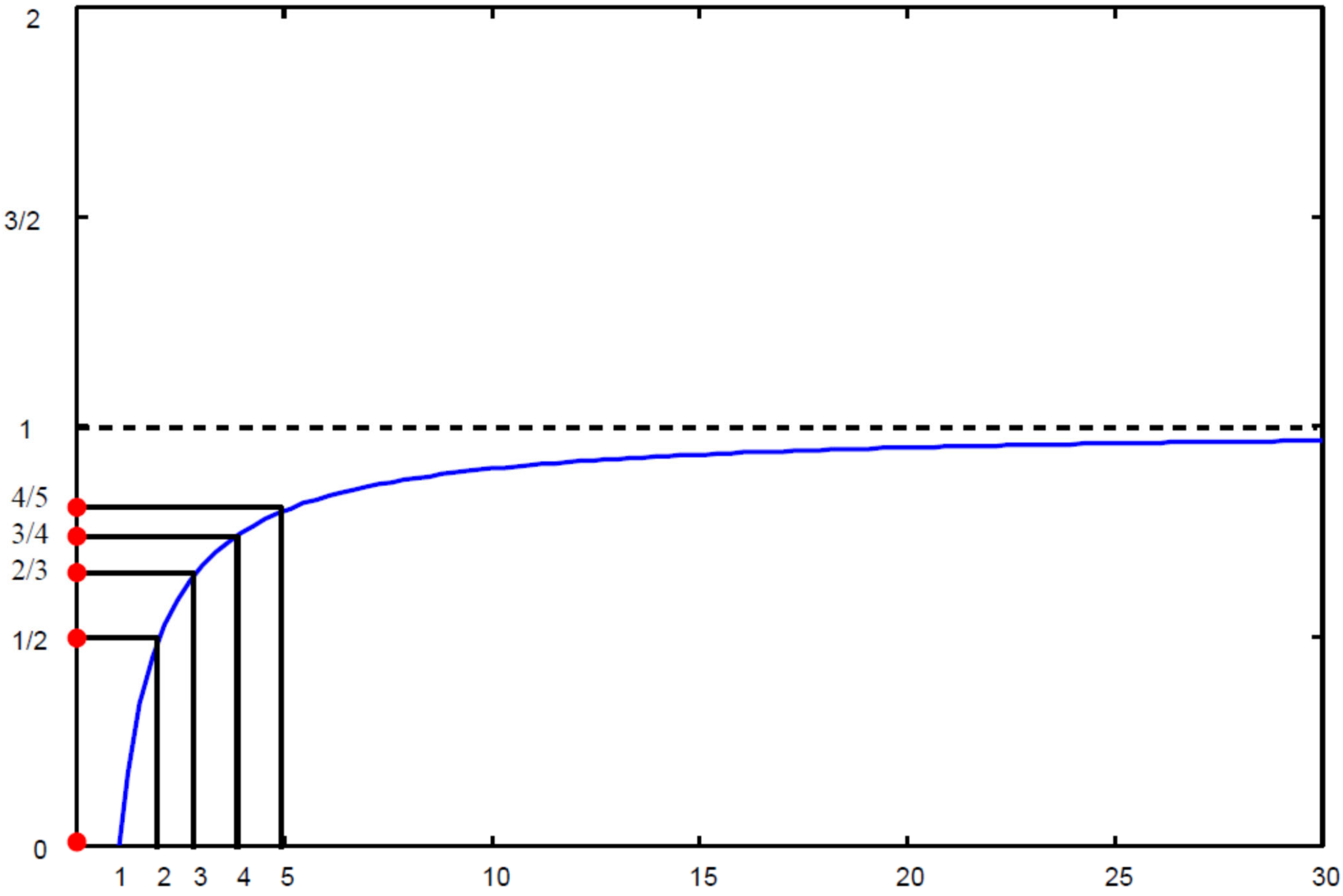
注意： a_k は単調非減少（上に有界）

⇔ $-a_k$ は単調非増加（下に有界）

具体例：

- $a_k = k$ や $a_k = k^2$ は 単調非減少，上に有界ではない
- $a_k = 1 - 1/k$ は 単調非減少，上に有界である
- $a_k = 0$ は 単調非減少，単調非増加，上に有界，下に有界

数列$a_k = 1 - \frac{1}{k}$



水谷友彦先生(静岡大)作成

上に有界で単調非減少な数列の性質

- 定義： 数列$a_1, a_2, a_3, \ldots$は実数 c に収束する
  ⟺ $\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}: \quad k \geq k_0 \Rightarrow |a_k - c| < \varepsilon$

- 定理： 数列$a_1, a_2, a_3, \ldots$は，次のいずれかの条件を満たすと収束
  - 上に有界で単調非減少
  - 下に有界で単調非増加

例：

$a_k = 1 - 1/k$ は　単調増加，上に有界である

➔ 1 に収束

$a_k = k^2$ は 単調増加，上に有界ではない

➔ +∞ に発散

$a_k = (-1)^k$ は　単調増加ではない，上に有界である

➔ どの値にも収束しない，発散しない

復習: 上界と上限

定義: 非空な実数の集合 M に対する上界 a ←→ $\forall x \in M,\ \ x \le a$

定理: 非空な実数の集合 M に対し,

上界が存在 ➔ 最も小さい上界が存在

定義: 非空な実数の集合 M に対する上限 a

＝ M に対する最も小さい上界

例: $\{1 - 1/k | k = 1,2, \dots\}$ に対し，a=1 は上界かつ上限.

a=2 は上界だが上限ではない

命題: a :実数の集合 M に対する上限 ➔

(i) $\forall x \in M,\ \ x \le a$（a は M の上界）

(ii) $\forall a' < a, \exists x \in \overset{M}{\cancel{X}}: x > a'$（a'<a ならば，a' は M の上界ではない）

上に有界で単調非減少な数列の性質

定理: 実数列$a_1, a_2, a_3, \ldots$は，次のいずれかの条件を満たすと収束
- 上に有界で単調非減少 （このとき，上限値に収束）
- 下に有界で単調非増加 （このとき，下限値に収束）

証明:

上に有界 → 定理より上限cが存在

上限の性質を使い，数列$a_1, a_2, a_3, \ldots$が c に収束することを示す.

ε>0 を任意に選ぶ．ある自然数 n_0 に対し

$k \geq n_0 \Rightarrow |a_k - c| = c - a_k < \varepsilon$ が成り立つことを示したい.

$c - \varepsilon < c$ なので，上限の性質(ii)より，$\exists a_{n_0}$: $a_{n_0} > c - \varepsilon$

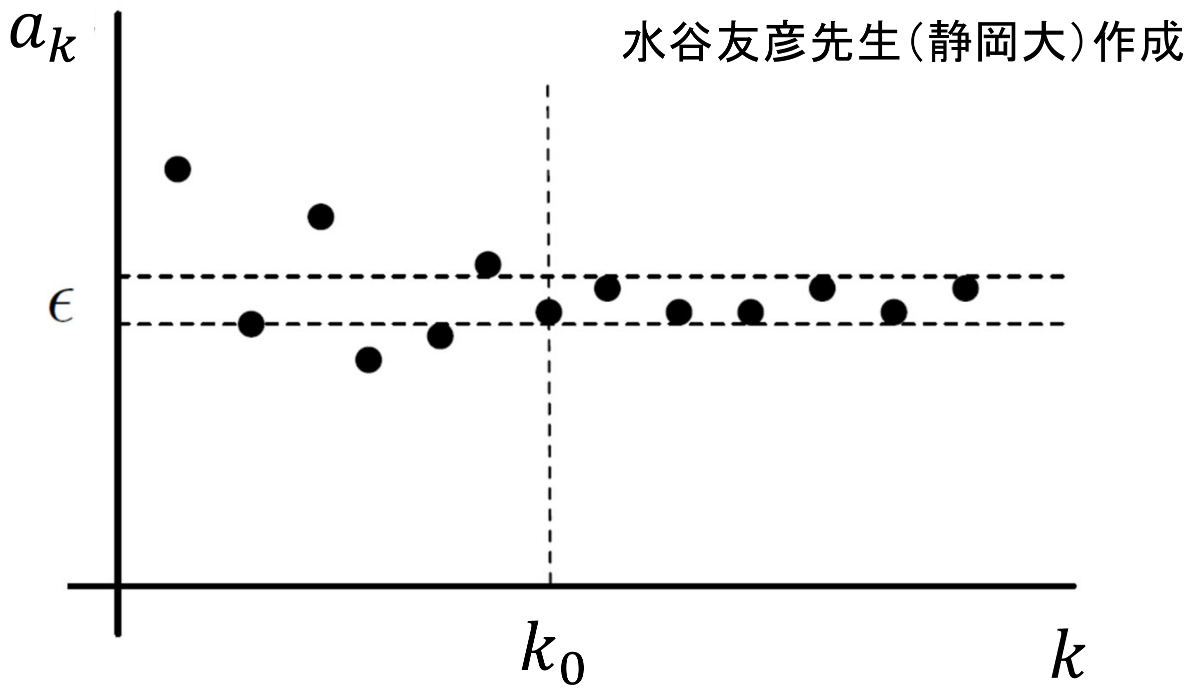
$\therefore c - a_{n_0} < \varepsilon$

数列の単調性より，$k \geq n_0 \Rightarrow c - a_k \leq c - a_{n_0} < \varepsilon$ ■

コーシー列

- **定義**:　数列$a_1, a_2, a_3, \ldots$ は**コーシー列（基本列）**
  $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}: \quad k', k \geq k_0 \Rightarrow |a_{k'} - a_k| < \varepsilon$

イメージ: 数列の収まる幅が徐々に狭くなる



コーシー列の例

$a_k = 0, \quad a_k = 1 - 1/k, \quad a_k = 0.5^k, \quad a_k =$ $\sqrt{2}$ の小数点k桁まで

コーシー列の性質

収束のイメージ: 数列がある一点に近づいていく

- 定理9.2:　実数列$a_1, a_2, a_3, \ldots$ は

収束する ←→ コーシー列

[→]の証明: 任意の$\varepsilon > 0$に対し,

$$\exists k_0 \in \mathbb{N}: \quad k', k \geq k_0 \Rightarrow |a_{k'} - a_k| < \varepsilon$$ を示す.

実数列$a_1, a_2, a_3, \ldots$は収束するので, その収束先をcとおくと,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}: k \geq k_0 \Rightarrow |a_k - c| < \varepsilon/2$$ が成り立つ.

したがって, $k_0 = n_0$に対し, $k', k \geq k_0$ならば,

$$|a_{k'} - c| < \varepsilon/2, \quad |a_k - c| < \varepsilon/2$$

$$\therefore |a_{k'} - a_k| \leq |a_{k'} - c| + |a_k - c| < \varepsilon \quad \blacksquare$$

コーシー列の性質

収束のイメージ: 数列がある一点に近づいていく

- 定理9.2: 実数列$a_1, a_2, a_3, \ldots$は
  収束する ←→ コーシー列

[←] の証明の概略:

$A_k = \{a_{k'} | k' = k, k+1, \ldots\}$ (k=1,2,...) とおく

→ A_k は有界(補題1), とくに下界が存在 → 下限 b_k が存在

b_k は単調非減少, 上に有界(補題2) ∴ 極限 b が存在.

この b は数列 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ の極限になっている(補題3). ■

※上に有界で単調非減少(下に有界で単調非増加)な数列はコーシー列

コーシー列の性質の証明1

補題1: 実数列$a_1, a_2, a_3, \ldots$ が　コーシー列 ➔ 有界

証明:

$\varepsilon = 1$に対し，$\exists k_0 \in \mathbb{N}$:　$k', k \geq k_0 \Rightarrow |a_{k'} - a_k| < 1$

とくに $k' = k_0$ とおく → $k \geq k_0 \Rightarrow \left|a_{k_0} - a_k\right| < 1$

$$\Rightarrow a_{k_0} - 1 < a_k < a_{k_0} + 1$$

したがって，実数列$a_1, a_2, a_3, \ldots$ に対し，

$\min\{a_1, a_2, \ldots, a_{k_0-1}, a_{k_0} - 1\}$ は下界，

$\max\{a_1, a_2, \ldots, a_{k_0-1}, a_{k_0} + 1\}$ は上界 ■

よって，k=1,2,... に対し，$A_k = \{a_{k'} | k' = k, k+1, \ldots\}$ は有界

コーシー列の性質の証明2

補題2: $A_k = \{a_{k'} | k' = k, k+1, \dots\}$ の下限を b_k とおくと,
b_k は単調非減少, 上に有界

「上に上界」の証明:
補題1 より, 実数列$a_1, a_2, a_3, \dots$ に対して上界 c が存在する.
b_k は $A_k = \{a_{k'} | k' = k, k+1, \dots\}$ の下限なので, $b_k \leq a_k \leq c$
よって $b_1, b_2, b_3, \dots$ は c 以下 $\therefore$ $b_1, b_2, b_3, \dots$ は上に有界.

「単調非減少」の証明は演習問題.

コーシー列の性質の証明3

補題3: 数列 $a_1, a_2, a_3, \dots$ は実数 b に収束する.

証明: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$: $k \geq n_0 \Rightarrow |a_k - b| < \varepsilon$ を示す.

その際, 以下の事実を使う:

① $b_1, b_2, b_3, \dots$ は b に収束　　②数列 $a_1, a_2, a_3, \dots$ はコーシー列

③ b_k は $A_k = \{a_{k'} | k' = k, k+1, \dots\}$ の下限

①より, $\varepsilon/2$ に対し, $\exists k_1 \in \mathbb{N}$: $k \geq k_1 \Rightarrow |b_k - b| < \varepsilon/2$ ④

②より, $\varepsilon/2$ に対し, $\exists k_2 \in \mathbb{N}$: $k, k' \geq k_2 \Rightarrow |a_k - a_{k'}| < \varepsilon/2$ ⑤

(つづく)

コーシー列の性質の証明3

補題3: 数列 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ は実数 b に収束する.
証明: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}: k \geq n_0 \Rightarrow |a_k - b| < \varepsilon$ を示す.

（つづき）
①より，$\varepsilon/2$ に対し，$\exists k_1 \in \mathbb{N}: k \geq k_1 \Rightarrow |b_k - b| < \varepsilon/2$ ④
②より，$\varepsilon/2$ に対し，$\exists k_2 \in \mathbb{N}: k, k' \geq k_2 \Rightarrow |a_k - a_{k'}| < \varepsilon/2$ ⑤
⑤より，$\forall k \geq k_2,\quad k' \geq k \Rightarrow a_k - \varepsilon/2 < a_{k'} < a_k + \varepsilon/2$
つまり，任意の $k \geq k_2$ に対し，$a_k - \varepsilon/2$ は A_k の下界
b_k は A_k の下限なので $a_k - {}^{\varepsilon}/_{2} \leq b_k \leq a_k$
$\therefore \forall k \geq k_2, |a_k - b_k| \leq \varepsilon/2$ ⑥
④, ⑥より，$n_0 = \max(k_1, k_2)$ に対し，
$k \geq n_0 \Rightarrow |a_k - b| \leq |a_k - b_k| + |b_k - b| < \varepsilon$ ■

収束に関する注意

定理: 実数列$a_1, a_2, a_3, \ldots$は　　コーシー列 ➔ 実数に収束

有理数の列$a_1, a_2, a_3, \ldots$は

コーシー列ならば実数に収束

しかし,　　有理数に収束するとは限らない

例: $a_k =$ $\sqrt{2}$ の小数点k桁まで → 収束先は$\sqrt{2}$

距離空間の復習

- 定義: 距離空間 (X, d) とは,
  集合 X と, その各要素の間の距離を与える距離関数 d の対
- 定義: $d: X \times X \to \mathbb{R}$ は距離関数 ←→ 以下の4条件を満たす
  (0) 任意の x,y∈X に対し, d(x,y)≧0
  (1) 任意の x,y∈X に対し, d(x,y) = 0 ←→ x = y
  (2) 任意の x,y∈X に対し, d(x,y) = d(y,x)
  (3) [三角不等式] 任意の x,y,z∈X に対し, d(x,z)≦d(x,y)+d(y,z)

- 定義: 距離空間 (X, d) の点列 $x_1, x_2, x_3, \ldots$ は $x \in X$ に収束
  ←→ $\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}: \quad k \geq k_0 \Rightarrow d(x_k, x) < \varepsilon$
- 定義: 距離空間 (X, d) の点列 $x_1, x_2, x_3, \ldots$ は 収束点列
  ←→ ある x∈X が存在して, 点列は x に収束

コーシー列の距離空間への一般化

- **定義**: 数列$a_1, a_2, a_3, \ldots$ は**コーシー列**

  ⟺ $\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}: \quad k', k \geq k_0 \Rightarrow |a_{k'} - a_k| < \varepsilon$

2つの実数 x,y の距離を d(x,y) = |x − y| と定義

→ 定義の条件の書き換え

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}: \quad k', k \geq k_0 \Rightarrow d(a_{k'}, a_k) < \varepsilon$$

同様にして，距離空間 (X, d) に対してコーシー列を定義

- **定義**: 距離空間 (X, d) の点列$x_1, x_2, x_3, \ldots$ は**コーシー列**

  ⟺ $\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}: \quad k', k \geq k_0 \Rightarrow d(x_{k'}, x_k) < \varepsilon$

収束点列とコーシー列

- 定理: 距離空間 (X, d) の任意の点列 $x_1, x_2, x_3, \ldots$ は
  収束する ➔ コーシー列

証明は演習問題

その逆「コーシー列➔収束点列」は成り立つとは限らない

- 定義: 距離空間 (X, d) は完備(complete)距離空間
  ⟷ 任意のコーシー列が収束する

完備でない距離空間の例1

- X = 実数の開区間 (a,b), d(x,y)=|x − y|

  例: (0,1) 区間の点列 $a_k = 1/k$ は

  コーシー列であり，0 に収束するが，$0 \notin X$

- X = 有理数全体の集合， d(x,y)=|x − y|

  例:「$a_k =$ $\sqrt{2}$ の小数点k桁まで」は

  コーシー列であり，$\sqrt{2}$ に収束するが，$\sqrt{2} \notin X$

完備でない距離空間の例2

- X = 区間[-1,+1]上の実数値連続関数全体 C[-1,+1]

$$d(f,g) = \int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)| dx$$

コーシー列の収束先が非連続関数になる例が存在

$$f_k(x) = \begin{cases} 0 & -1 \le x \le 0, \\ kx & 0 < x < \frac{1}{k}, \\ 1 & \frac{1}{k} \le x \le 1 \end{cases}$$

極限は

$$g(x) = \begin{cases} 0 & -1 \le x \le 0, \\ 1 & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

ユークリッド空間の完備性

- 定理: n次元ユークリッド空間の
  任意のコーシー列$a_1, a_2, a_3, \ldots$ は収束する

証明の概略:

$a_k(i)$ = ベクトル a_k の第 i 成分とおく.

各 i = 1,2,...,n に対し,

$a_1(i), a_2(i), a_3(i), \ldots$ は数列で, コーシー列（演習問題）

∴ $a_1(i), a_2(i), a_3(i), \ldots$ はある実数 $a(i)$ に収束

∴ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ はベクトル $a = (a(1), a(2), \ldots, a(n))$ に
収束（演習問題）

部分列

数列･点列の有界，非有界

- 定義：実数列$a_1, a_2, a_3, \ldots$は有界
  ←→ ある実数 q が存在して，-q≦ a_k ≦+q (k=1,2,…)
- 定義：実数列$a_1, a_2, a_3, \ldots$は非有界 ←→ 有界ではない
  ←→任意の実数 q に対し，ある k が存在して，-q > a_k または a_k > +q

- 定義：n次元実ベクトルの列$a_1, a_2, a_3, \ldots$は有界
  ←→ ある実数 q が存在して，d(0, a_k) = ||0 − a_k||≦+q (k=1,2,…)
- 定義：n次元実ベクトルの列$a_1, a_2, a_3, \ldots$は非有界
  ←→ 有界ではない

命題：n次元実ベクトルの列$a_1, a_2, a_3, \ldots$は，収束するならば有界

※　有界でも収束しない例が存在：　$a_k = (-1)^k$

演習問題

問1： 実数の集合A とB に対し，$A \subseteq B$ が成り立ち，かつA, B に下限 a,b が存在するものとする．a≧b が成り立つことを証明せよ.

問2：n次元ユークリッド空間における実ベクトル列 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ を考える． $a_1, a_2, a_3, \ldots$ がコーシー列のとき，それぞれのベクトルの第i成分 $a_1(i), a_2(i), a_3(i), \ldots$ は（実数空間における）コーシー列である．これを証明せよ.

問3：n次元ユークリッド空間における実ベクトル列 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ を考える．それぞれのベクトルの第i成分 $a_1(i), a_2(i), a_3(i), \ldots$ は $b(i)$ に収束するとする．このとき，実ベクトル列 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ がベクトル $b = (b(1), b(2), \ldots, b(n))$ に収束する．これを証明せよ.