経営経済数学

連続関数の最小値

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

関数の最小解，最大解，最小値，最大値

関数 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,　　　集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$

定義：　$a \in S$ は S における f の最小解

⟺ 任意の $x \in S$ に対し，$f(x) \geq f(a)$

このとき，値 $f(a)$ は S における f の最小値 とよばれる

定義：　$b \in S$ は S における f の最大解

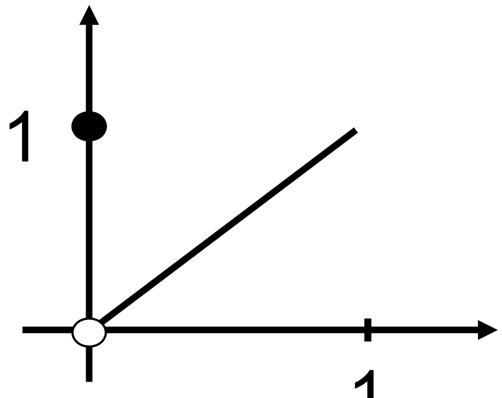
⟺ 任意の $x \in S$ に対し，$f(x) \leq f(b)$

このとき，値 $f(b)$ は S における f の最大値 とよばれる

※ 最小解，最大解，最小値，最大値は存在するとは限らない

最小解，最大解が存在するための条件は？

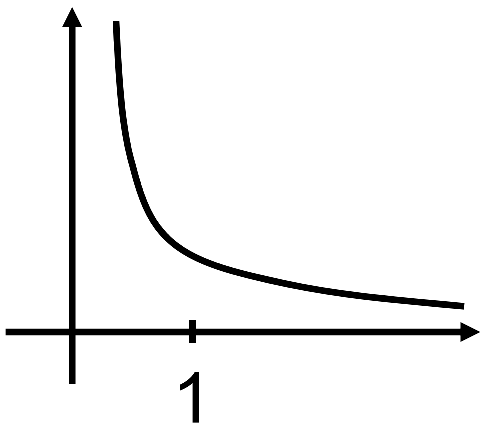
最小解が存在しない例



$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x = 0) \\ x & (x > 0) \end{cases}$$

$$S = \{x | 0 \leq x \leq 1\}$$

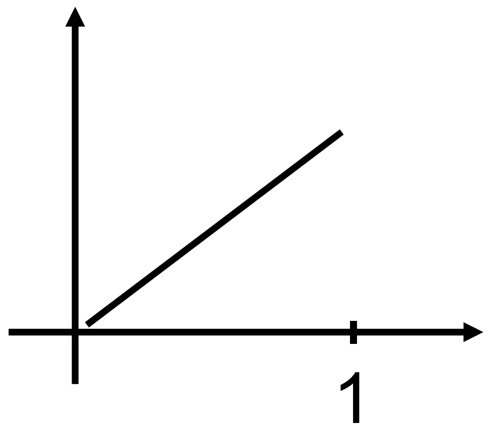
xを0に近づけると
関数値は減少して
0に近づくが,
x=0 では1になる



$$f(x) = 1/x$$

$$S = \{x | x \geq 1\}$$

xを大きくしていくと
関数値は減少して
0に近づくが,
f(x)=0 となる x は
存在しない



$$f(x) = x$$

$$S = \{x | 0 < x \leq 1\}$$

xを0に近づけると
関数値は減少して
0に近づくが,
x=0 は定義域に
入っていない

復習:関数の連続性

定義: 一変数関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は連続

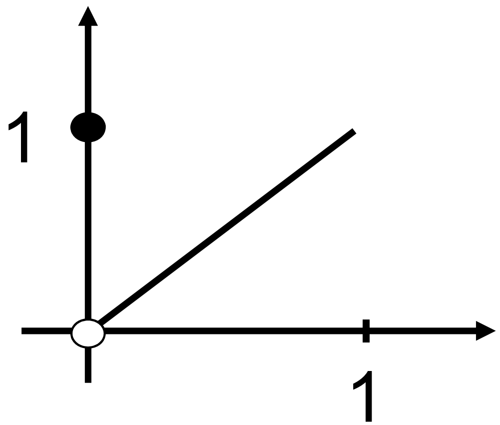
⇔ $\forall x \in \mathbb{R}$, x に収束する任意の数列 a_k に対し，f(a_k) は f(x) に収束

⇔ $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\colon |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

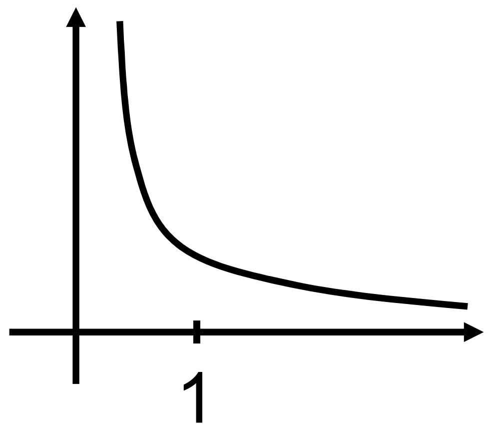
定義: 多変数関数 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は連続

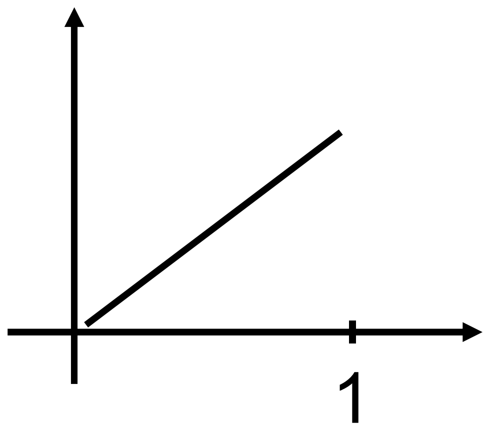
⇔ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, xに収束する任意の数列 a_k に対し，f(a_k) は f(x) に収束

⇔ $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\colon ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|| < \delta \Rightarrow |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| < \varepsilon$



不連続



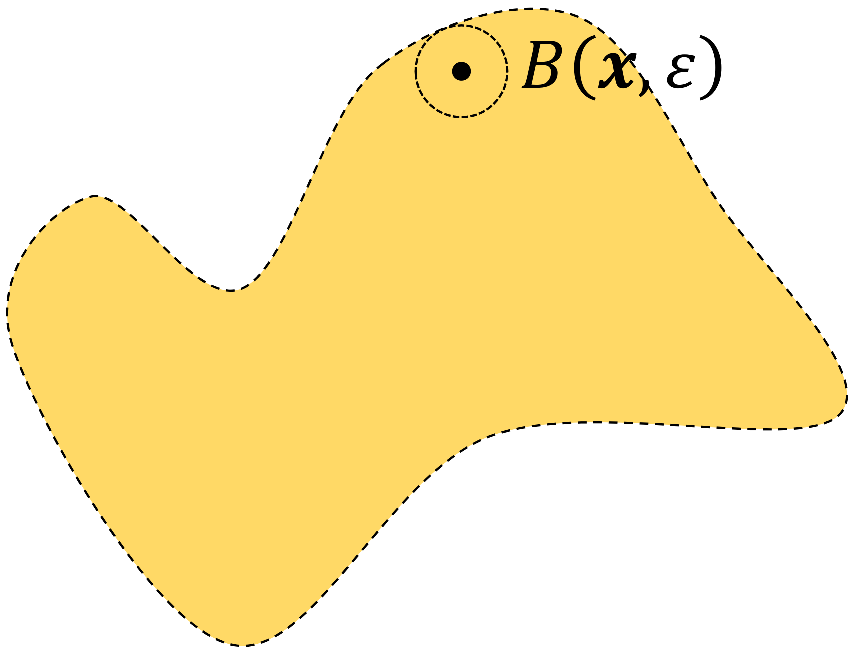


連続

復習：開集合

定義： $S \subseteq \mathbb{R}^n$ は開集合 ⟵⟶ $\forall \boldsymbol{x} \in S, \exists \varepsilon > 0: B(\boldsymbol{x}, \varepsilon) \subseteq S$

x を中心とする十分小さい球（の内部）は S に含まれる



復習：閉集合

定義： $S \subseteq \mathbb{R}^n$ は**閉集合**

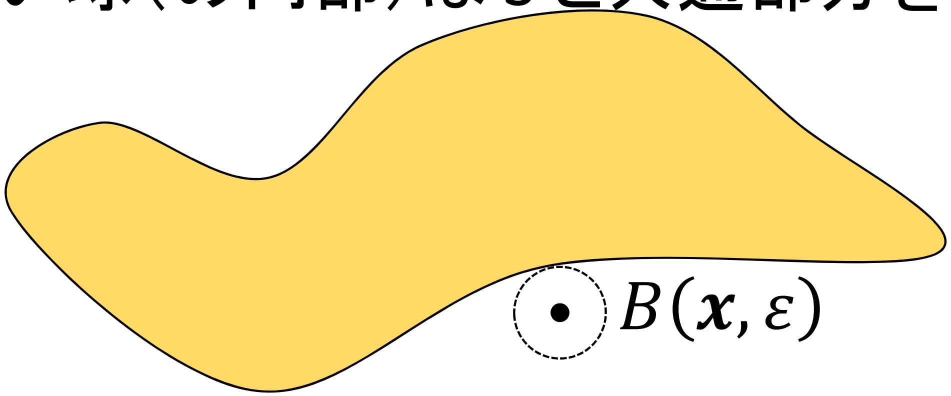
$\Leftrightarrow$ $S = S$の触点の集合

$\Leftrightarrow$ 補集合 S^c は開集合

$\Leftrightarrow$ $\forall \boldsymbol{x} \in S^c, \exists \varepsilon > 0: B(\boldsymbol{x}, \varepsilon) \cap S = \emptyset$

任意の x ∉ S に対し，x を中心とする

十分小さい球（の内部）は S と共通部分をもたない



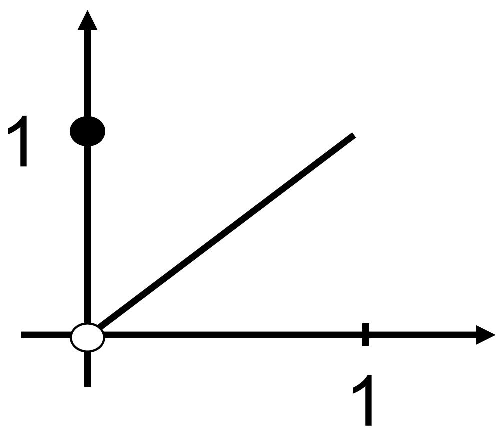
最小解，最大解が存在するための十分条件

定理9.13： $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$が連続関数，　$S \subseteq \mathbb{R}^n$ が有界閉集合

➔ 最小解，最大解が存在．

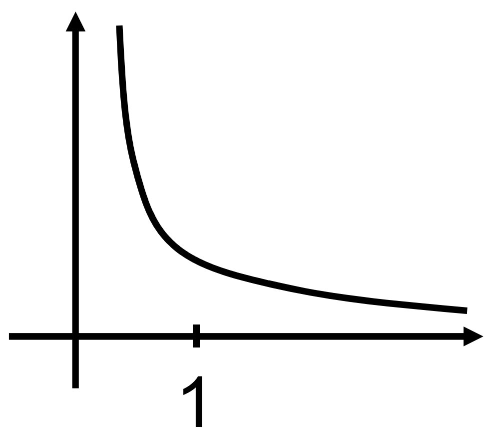
※ (i) f が連続 (ii) S が有界 (iii) S が閉集合　　のいずれかひとつの条件が欠けると，最小解，最大解が存在しないことがある．

最小解が存在しない例



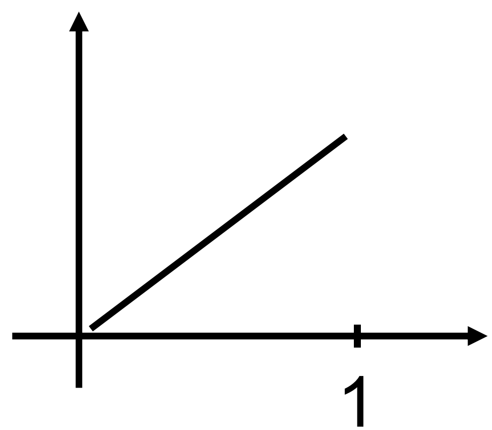
$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x = 0) \\ x & (x > 0) \end{cases}$$

$S = \{x | 0 \leq x \leq 1\}$



$f(x) = 1/x$

$S = \{x | x \geq 1\}$



$f(x) = x$

$S = \{x | 0 < x \leq 1\}$

定理9.13の証明

定理9.13： $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$が連続関数， $S \subseteq \mathbb{R}^n$ が有界閉集合

➔ 最小解，最大解が存在.

定理9.12（m=1のとき）と定理9.8を使うと簡単に示せる.

定理9.12 (m=1)： $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が連続関数， $A \subseteq \mathbb{R}^n$ が有界閉集合

➔ A の像 $f(A) = \{f(x) | x \in A\}$ も有界閉集合

（証明はあとで. ※教科書の方針と異なる証明）

定理9.8: $A \subseteq \mathbb{R}$ が有界閉集合 ➔ A の最小元，最大元が存在

（つまり，∃a,b∈A, ∀x∈A, a≦x≦b）

定理9.12の証明: $f(A)$ の有界性

背理法の仮定: $f(A)$が上に非有界

➔ Aのある数列 a_k が存在して，$f(a_k)$ は+∞ に発散

A は有界なので，数列 a_kは

　収束する部分列a_{k_j} $(j = 1,2,\ldots)$ をもつ（定理9.5）← 極限を c とおく

$f(a_{k_j})$ $(j = 1,2,\ldots)$ は数列$f(a_k)$の部分列

➔ 下記の命題より $f\left(a_{k_j}\right)$ は+∞ に発散

一方，部分列a_{k_j} $(j = 1,2,\ldots)$ は c に収束

∴連続性の定義より $f\left(a_{k_j}\right)$ は $f(c)$ に収束.　　　よって矛盾.

同様にして，$f(A)$が下に有界であることも示せる. ■

定理9.5: 任意の有界な実ベクトル列は，収束する部分列をもつ.

命題: 数列$a_1, a_2, a_3, \ldots$ がcに収束（±∞に発散）するとき，
その任意の部分列も c に収束（±∞に発散）する.

定理9.12の証明: $f(A)$は閉集合

定理9.6 を使い, $f(A)$の閉集合の証明をする.
$f(A)$の任意の収束列 f(a_k)を考える ← 極限を z とおく
$z \in f(A)$を示したい.

A は有界なので, 数列 a_kは収束する部分列a_{k_j} $(j = 1,2,\ldots)$
をもつ(定理9.5)← 極限を c∈A とおく
f は連続なので, 定義より$f\left(a_k あ_j\right)$ は $f(c) \in f(A)$ に収束
一方, $f\left(a_{k_j}\right)$ は f(a_k) の部分列なので z に収束
$\therefore z = f(c) \in f(A)$ ■

中間値の定理

定理：関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は連続であり，
実数 $a,b\ (a<b)$ に対し $f(a)\neq f(b)$ が成り立つとする．
このとき，$\min\{f(a),f(b)\}<y<\max\{f(a),f(b)\}$ を満たす
任意の y に対し，ある $x\in(a,b)$ が存在して，$f(x)=y$ を満たす．

（証明）一般性を失うことなく，$f(a)<y<f(b)$ と仮定する．
まず，2つの実数列 $a_0=a,a_1,a_2,\ldots,b_0=b,b_1,b_2,\ldots$ を定義：
各 i=0,1,2,… に対し，$f(a_i)\leq y\leq f\left(\frac{a_i+b_i}{2}\right)$ ならば
$a_{i+1}=a_i, b_{i+1}=\frac{a_i+b_i}{2}$，それ以外のときは $a_{i+1}=\frac{a_i+b_i}{2}$，$b_{i+1}=b_i$.
（後者のとき$f\left(\frac{a_i+b_i}{2}\right)\leq y\leq f(b_i)$成立）
数列の定義より，

$a_0\leq a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_i\leq\cdots\leq b_i\leq\cdots\leq b_2\leq b_1\leq b_0$ ①

任意の i について $f(a_i)\leq y\leq f(b_i)$ ②

が成り立つ．

中間値の定理

定理：関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は連続であり，
実数 a, b $(a < b)$ に対し $f(a) \neq f(b)$ が成り立つとする.
このとき， $\min\{f(a), f(b)\} < y < \max\{f(a), f(b)\}$ を満たす
任意の y に対し，ある $x \in (a, b)$ が存在して，$f(x) = y$ を満たす.

（証明のつづき）
① より， $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_0, b_1, b_2, \ldots$ は同じ値に収束（以前証明した）
その収束先を x とおく.
数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_0, b_1, b_2, \ldots$ は閉区間 [a,b] に含まれるので，
その収束先 x も [a,b] に含まれる.
②より， $f(a_i) \leq y$ だから $f(x) \leq y$ （演習問題）
同様に， $f(b_i) \geq y$ だから $f(x) \geq y$.
$\therefore f(x) = y$.
$\min\{f(a), f(b)\} < y < \max\{f(a), f(b)\}$ なので，x≠a,b.
∴ x∈(a,b)　　■

演習問題

問1: 実数列 $a_0 = a, a_1, a_2, \ldots$ は $f(a_i) \leq y$ $(i = 0,1,2,\ldots)$ をみたし，かつ x に収束するとする．関数 f が連続ならば，$f(x) \leq y$ が成り立つ．このことを証明せよ．