計算用紙 (この紙１枚は試験開始後に必ず切り取ってください)

学籍番号	名前

2009 年度　数理計画法　中間試験問題 [50 点満点]

2009 年 11 月 19 日 (木) 13 時 00 分~ 14 時 30 分 (90 分間)

注意事項

1. 講義ノート、参考図書、ノート、電卓、計算機などの持込みは不可。
2. 解答は各設問の下、もしくは右側のページに書くこと。
3. 試験問題は全部で A4 用紙 5 枚からなる。

試験の成績の問合せについて

採点は遅くても 11 月 24 日 (火) までには終了する予定です。成績については、次のいずれかの方法で問い合わせてください。

1. 11 月 26 日 (木) の授業時間の前に直接聞く。問合せの際は学生証を提示してください。
2. 塩浦の研究室を訪問して直接聞く。研究室は情報科学研究科棟 8 階 803 号室です。
3. 電子メイルにて問合わせる。採点が終わり次第、成績を通知します。

問題 1.

(a) A さん、B さん、C さんの 3 人に、仕事 X、Y、Z を 1 つずつ割り当てたい。それぞれの人がそれぞれの仕事に割り当てられたときの満足度は以下の表の通りである。このとき、3 人の満足度の合計を最大にするような仕事の割り当て方を求める問題を考える。この問題を、**整数計画問題**として定式化せよ。

人 \ 仕事	X	Y	Z
A さん	7	9	5
B さん	8	7	6
C さん	3	6	7

(b) 平面上に描かれた 5 つの点 (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), (a_4, b_4), (a_5, b_5) をすべて含む円のうち、半径が最小のものを求める問題を考える。ただし、円の中心は平面上のどこに位置しても構わない。
この問題を**非線形計画問題**として定式化せよ。

(c) 双対問題が実行不可能となるような線形計画問題の例を書け。ただし、問題の変数の数は 2 個以下とする。また、書いた問題に対し、双対問題が実行不可能となる理由を説明せよ。

問題 1 の解答欄

問題 1 の解答欄

問題 2.

次の線形計画問題 [P] とその双対問題 [D] について考える。なお、$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2, c_1, c_2$ はいずれも定数である。

$$
[\mathrm{P}]\left|\begin{array}{ll}
\text{最小化} & c_1x_1 + c_2x_2 \\
\text{条件} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1 \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \geq b_2 \\
 & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0
\end{array}\right.
\qquad
[\mathrm{D}]\left|\begin{array}{ll}
\text{最大化} & b_1y_1 + b_2y_2 \\
\text{条件} & a_{11}y_1 + a_{21}y_2 \leq c_1 \\
 & a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \leq c_2 \\
 & y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0
\end{array}\right.
$$

(a)　問題 [D] を不等式標準形および等式標準形に書き換えよ。

(b)　問題 [P] および [D] に対する相補性条件を書け。

(c)　問題 [P] の許容解 (x_1, x_2) および [D] の許容解 (y_1, y_2) は、相補性条件を満たすときにそれぞれ最適解となることが知られているが、これを証明せよ。なお、証明の際には以下の定理を使っても良い。

> **定理 A**：　問題 [P] の許容解 (x_1, x_2) および問題 [D] の許容解 (y_1, y_2) に対して、
>
> $$c_1x_1 + c_2x_2 = b_1y_1 + b_2y_2$$
>
> が成り立つならば、(x_1, x_2) は問題 [P] の最適解であり、(y_1, y_2) は問題 [D] の最適解である。

(d)　問題 [P] の最適解 (x_1, x_2) および [D] の最適解 (y_1, y_2) に対し、相補性条件が成り立つことが知られている。これを用いて、次の線形計画問題の双対問題の最適解を求めよ。ただし、次の線形計画問題の最適解は $(1/2, 1/6)$ である。

$$
\left|\begin{array}{ll}
\text{最小化} & 3x_1 + 5x_2 \\
\text{条件} & x_1 + 3x_2 \geq 1 \\
 & 3x_1 + 3x_2 \geq 2 \\
 & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0
\end{array}\right.
$$

問題 2 の解答欄

問題 2 の解答欄

問題 3.

(a)　次の線形計画問題について考える。なお、$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2, c_1, c_2$ はいずれも定数である。

$$
[\mathrm{P}]\left|\begin{array}{ll}
\text{最小化} & c_1x_1 + c_2x_2 \\
\text{条件} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1 \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \geq b_2 \\
 & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0
\end{array}\right.
$$

(a-1)　問題 [P] の許容解 (x_1, x_2) が最適解であることの定義を述べよ。

(a-2)　問題 [P] が非有界であることの定義を述べよ。

(b)　問題 [P] の辞書は以下のように書ける。この辞書について考える。

$$
\left|\begin{array}{ccccc}
z & = & 0 & +c_1x_1 & +c_2x_2 \\
x_3 & = & -b_1 & +a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 \\
x_4 & = & -b_2 & +a_{21}x_1 & +a_{22}x_2
\end{array}\right.
$$

(b-1)　この辞書の基底解を書け。また、基底解が許容解であるための必要十分条件を書け。

(b-2)　基底解が許容解であると仮定する。このとき、$c_1 \geq 0$ および $c_2 \geq 0$ が成り立つならば、基底解は最適解である。その理由を説明せよ。

(b-3)　基底解が許容解であると仮定する。$c_1 < 0$, $a_{11} \geq 0$, および $a_{21} \geq 0$ が成り立つならば、この問題は非有界である。その理由を説明せよ。

問題 3 の解答欄

問題 3 の解答欄

問題 4.

(a)　**2 段階単体法の第 1 段目を利用**して、以下の線形計画問題の許容解が存在するか否かを判定せよ。

$$
\begin{array}{rrrl}
\text{最小化} & x_1 & +2x_2 & \\
\text{条件} & -3x_1 & +x_2 & \geq 4 \\
 & 2x_1 & +x_2 & \geq 3 \\
 & x_1 & +x_2 & \geq 1 \\
 & \multicolumn{3}{r}{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0}
\end{array}
$$

(b)　以下の辞書に対して、最小添字規則を使ったピボット演算を **1 回**実行せよ。最適解を求める必要はない。

$$
\begin{array}{rcrrr}
z & = & -4 & -2x_3 & -x_2 \\
x_4 & = & 2 & -x_3 & -x_2 \\
x_1 & = & 4 & -5x_3 & -2x_2
\end{array}
$$

問題 4 の解答欄

問題 4 の解答欄