計算用紙 (この紙１枚は試験開始後に必ず切り取ってください)

学籍番号	名前

2010 年度　数理計画法　期末試験問題 [50 点満点]

2011 年 2 月 3 日 (木) 13 時 00 分〜14 時 30 分 (90 分間)

注意事項

1. 講義ノート，参考図書，ノート，電卓，計算機などの持込みは不可.
2. 解答は各設問の下，もしくは右側のページに書くこと.
3. 試験問題は問 1 から問 4 までである.

問題 1.

図 1 のネットワークにおいて，頂点 s から t への最大フローを求めたい．なお，各枝の数値はその枝の容量を表す．

(a) 図 1 の最大フロー問題を定式化せよ.「最大化… 条件…」の形で書き，目的関数および全ての制約条件を**省略しないで**書くこと.

(b) 図 1 の問題において，最大フローのフロー値 f がカット $(\{s,a\},\{b,c,t\})$ の容量以下になることを証明しなさい．ただし，**(a) の定式化に書かれている制約条件を使って**証明すること.

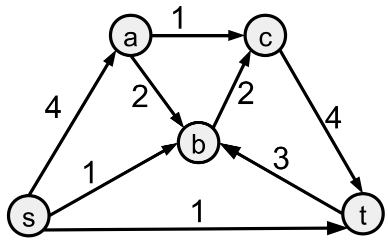


図 1: 最大フロー問題

(c) 図 2 のネットワークにおいて，最小カットが $(\{s,a,c\},\{t,b,d\})$ となるように，各枝の容量を求めよ．ただし，枝 $(s,b),(c,d),(c,t)$ の容量は図の通りとする (結果のみ書けばよい).

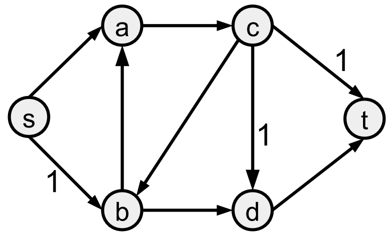
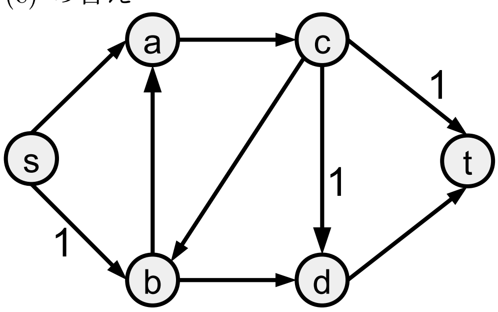


図 2: 最小カット問題

問題 1 の解答欄

(c) の答え



問題 1 の解答欄

問題 1.(続き)

(d)　図 1 の問題の最大フローをパス増加法により求めよ．ただし，各枝のフロー量が 0 の初期フローから始めること．アルゴリズムの各反復で用いた残余ネットワーク，選んだ $s-t$ パス，更新した後のフローを省略せずに書くこと．

(e)　(d) で求めた最大フローに対する残余ネットワークを用いて，図 1 のネットワークにおける最小カットを求めよ．答えだけでなく，その計算過程も書くこと．

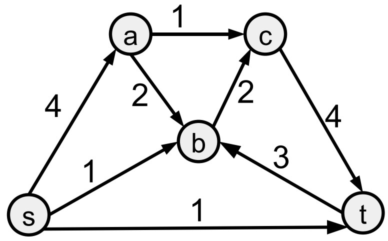


図 1(再掲): 最大フロー問題

問題 1 の解答欄

問題 1 の解答欄

問題 2.

(a)　図 3 の最小費用フロー問題において，費用最小のフローを負閉路消去法により求めよ．ただし，各枝における左側の数値は容量，右側の数値は費用を表す．供給点 s での供給量と需要点 t での需要量は 4 とする．また，初期フローは図 4 のように与えられる．なお， アルゴリズムの各反復で用いた残余ネットワーク，選んだ負閉路，更新した後のフローを省略せずに書くこと．

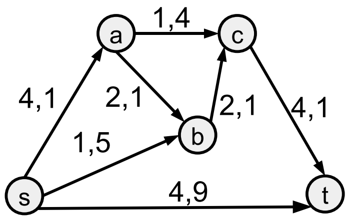


図 3: 最小費用フロー問題

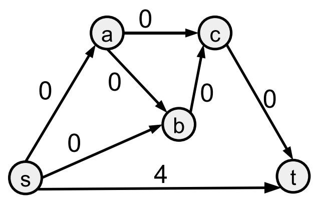


図 4: 初期フロー

(b)　有向グラフ上の頂点 s から頂点 t への最短路（最短パス）を求める問題は，最小費用フロー問題に変換して解くことが出来る．この変換方法を詳しく説明せよ．必要であれば，図 5 の最短路問題の例を使って説明しても良い．

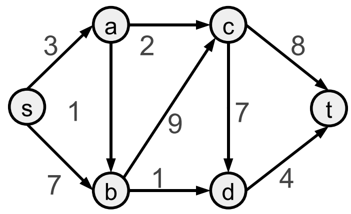


図 5: 最短路問題の例

問題 2 の解答欄

問題 2 の解答欄

問題 3.
制約なしの非線形計画問題「最小化　$f(\boldsymbol{x})$　条件　$\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$」について考える．ここで $f(\boldsymbol{x})$ は $\mathbf{R}^n$ 上で定義された，何回でも微分可能な関数とする．

(a)　ベクトル $x^* \in \mathbf{R}^n$ は制約なし問題の最適解とする．このとき，$\nabla f(x^*) = \mathbf{0}$ が成り立つことを証明せよ．なお，勾配ベクトルに関する次の性質を使って良い．

> **性質 1**　任意のベクトル $y \in \mathbf{R}^n$ に対し，$\nabla f(y) \neq \mathbf{0}$ ならば，十分小さい $\delta > 0$ が存在して $f(y - \delta \nabla f(y)) < f(y)$ が成り立つ．

(b)　**(b-1)**　ベクトル $x^* \in \mathbf{R}^n$ が極小解であることの定義を書きなさい．
(b-2)　$x^* \in \mathbf{R}^n$ が孤立極小解であることの定義を書きなさい．

(c)　**(c-1)**　$x^* \in \mathbf{R}^n$ が極小解であるとき，ヘッセ行列 $\mathrm{H}f(x^*)$ はどのような性質をもつか，説明せよ．
(c-2)　$x^* \in \mathbf{R}^n$ は $\nabla f(x^*) = \mathbf{0}$ を満たすと仮定する．このとき，x^* が孤立極小解であるためのヘッセ行列 $\mathrm{H}f(x^*)$ に関する十分条件を書きなさい．

(d)　関数 $f(x, y) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3 - y^2$ の停留点をすべて列挙せよ．また，**問題 (c) で述べた条件を使って**，極小解をすべて列挙せよ．

問題 3 の解答欄

問題 3 の解答欄

問題 4.

制約なしの非線形計画問題「最小化　$f(\boldsymbol{x})$　条件　$\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$」について考える．ここで $f(\boldsymbol{x})$ は $\mathbf{R}^n$ 上で定義された，何回でも微分可能な関数とする．この問題に対するアルゴリズムとして，最急降下法とニュートン法が知られている．

(a)　最急降下法とニュートン法では，解を更新する際に**最急降下方向**と**ニュートン方向**を使う．これらの方向の定義を書きなさい．

(b)　最急降下法と比較したときのニュートン法の長所，短所をそれぞれ挙げよ．

(c)　関数 $f(x,y) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3 - y^2$ に対して，初期点を $(x,y) = (0,1)$ として，最急降下法を 1 反復実行したときの次の点（ベクトル）を計算せよ．結果だけでなく，途中の計算過程も書くこと．

(d)　関数 $f(x,y) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3 - y^2$ に対して，初期点を $(x,y) = (2,2)$ として，ニュートン法を 1 反復実行したときの次の点（ベクトル）を計算せよ．結果だけでなく，途中の計算過程も書くこと．

問題 4 の解答欄

問題 4 の解答欄