2014 年度 数理計画法 期末試験問題 [50 点満点]

2015 年 1 月 29 日(木) 13 時 00 分～14 時 30 分 (90 分)

問 1

(1)： 関数 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は，任意のベクトル$x, y \in \mathbb{R}^n$と任意の実数 $t\ (0 \leq \mathrm{t} \leq 1)$ に対して不等式

$$(1-t)f(x) + tf(y) \geq f((1-t)x + ty)$$

を満たすとき，凸関数と呼ばれる．

(a)：一変数関数$f(x) = -|x|$ が凸関数**ではない**ことを証明せよ．なお，$|x|$ は変数 x の絶対値を表す．

(b)： f は微分可能な凸関数とし，x^*はfの停留点とする．このとき，x^* はfの最適解（fを最小化するベクトル）であることを証明せよ．なお，以下の性質を使って良い．

定理 A：f は微分可能な凸関数とする．このとき，任意のベクトルx, y に対して次の不等式が成り立つ．

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)(y-x)$$

(2)： 行列$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ は，$a > 0, c > 0, ac - b^2 > 0$ が成り立つとき，正定値である．これを証明しなさい．

問 2 関数 $f(x,y) = x^4 - 2x^2 + y^3 + 3y^2$ について考える．

(1)： 関数 f の勾配ベクトル$\nabla f(x,y)$とヘッセ行列 $\mathrm{H}f(x,y)$ を計算せよ．

ヒント： $\nabla f(1,1) = (0,9)$ となります．

(2)： 関数 f の$(x,y) = (1,1)$ におけるニュートン方向（移動方向）を計算せよ．

ヒント：行列$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ が正則のとき，その逆行列は $\frac{1}{ac-b^2}\begin{bmatrix} c & -b \\ -b & a \end{bmatrix}$ である．

(3)： 関数 f の停留点をすべて計算せよ．

(4)： 問(3)で求めた停留点に対し，ヘッセ行列を計算せよ．

(5)： 問(4)で求めたヘッセ行列を使って各停留点が極小解か否かを判定し，その理由を書け．

ただし，次の性質を使うこと：

定理 B：ベクトルx は関数fの停留点とする．このとき，次が成り立つ．

（i）ベクトルxでのヘッセ行列が正定値ならば，xは極小解である．

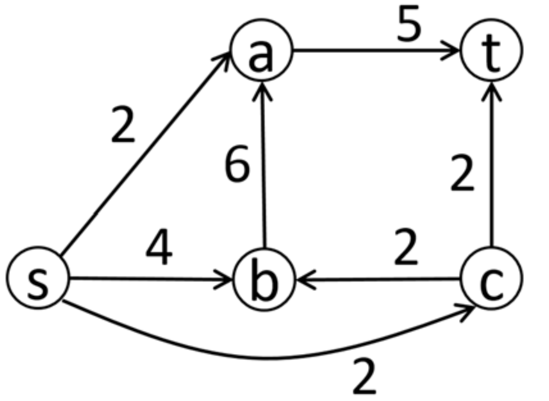
（ii）ベクトルxが極小解ならば，xのヘッセ行列は半正定値である．

定理 C： （i）行列$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ が正定値であることの必要十分条件は，$a > 0, c > 0, ac - b^2 > 0$ が成り立つことである．

（ii）行列$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ が半正定値であることの必要十分条件は，$a \geq 0, c \geq 0, ac - b^2 \geq 0$ が成り立つことである．

（次のページに続く）

問 3



(1)：右のネットワークにおいて，ソース（供給点）s からシンク(需要点） t への最大フローを**増加路アルゴリズムにより**求めよ. 各反復での残余ネットワークおよび用いた増加路を書くこと． なお，右のネットワークにおいて，枝に付随する数値は容量を表す.

(2)： 問(1)で求めた最大フローの残余ネットワークを使って，右のネットワークの**最小カットを計算せよ**．また，この残余ネットワークにおいて，**ソース s から到達可能な頂点の集合 S と残りの頂点集合 T を求めよ**.

(3)：問(2)で求めた頂点集合 S, T を結ぶ各枝(i, j)に対し，次の性質が成り立つことを証明せよ.

$$i \in S, j \in T \text{ ならば } x_{ij} = u_{ij}, \quad i \in T, j \in S \text{ ならば } x_{ij} = 0$$

ここで，x_{ij} は枝(i, j)のフロー量，u_{ij} は枝(i, j)の容量を表す.

問 4

下図の左側のネットワークに関する最小費用流問題について考える．なお，左側のネットワークに置いて枝に付随する数値は「容量，費用」を表し，各頂点に付随する数値は需要供給量を表す.

(1)：この問題を定式化しなさい.

(2)：この問題を，**負閉路消去アルゴリズムを使って**計算せよ．ただし，**初期フローは下図の右側のように与えられる**. 各反復でのフローの値，残余ネットワーク，および用いた負閉路を省略せずに書くこと.

ヒント：最小費用フローの総費用は３となる.