数理計画法（数理最適化）第3回

線形計画問題の諸定理

塩浦昭義　Akiyoshi Shioura
(情報科学研究科　准教授)
shioura@dais.is.tohoku.ac.jp
http://www.dais.is.tohoku.ac.jp/~shioura/teaching

復習：主問題と双対問題

主問題(primal problem)

最小化：$c_1x_1+\cdots+c_nx_n$

条件：$a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \geq b_1$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n \geq b_m$$

$$x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$$

双対問題(dual problem)

最大化：$b_1y_1+\cdots+b_my_m$

条件：$a_{11}y_1+\cdots+a_{m1}y_m \leq c_1$

$$\vdots$$

$$a_{1n}y_1+\cdots+a_{mn}y_m \leq c_n$$

$$y_1, y_2, \ldots, y_m \geq 0$$

主問題の i 番目の不等式

$$a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n \geq b_i$$

⇔ 対応

双対問題の i 番目の変数

$$y_i \geq 0$$

主問題の j 番目の変数

$$x_j \geq 0$$

⇔ 対応

双対問題の j 番目の不等式

$$a_{1j}y_1+\cdots+a_{mj}y_m \leq c_j$$

実行可能, 実行不可能

定義：不等式標準形のLPに対し

- 実行可能(feasible)⇔許容解（実行可能解）が存在する
- 実行不可能(infeasible)⇔許容解（実行可能解）が存在しない

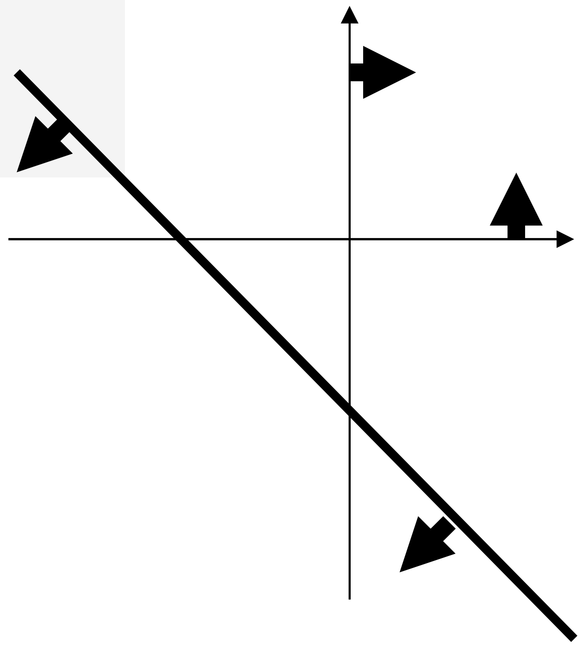
最小化　$x + 2y$
条件　$-x - y \geqq -3$
　　　$x, y \geqq 0$

実行可能

（1，1）は許容解

最小化　$x + 2y$
条件　$-x - y \geqq 1$
　　　$x, y \geqq 0$

実行不可能



有界，非有界

定義：実行可能なLPは（最小化の場合）

- 有界(bounded)
  ⇔任意の許容解の目的関数値がある定数より大きい
- 非有界(unbounded)⇔目的関数値をいくらでも小さく出来る

最小化　x + 2y
条件　-x - y≧ -3
　　　x, y≧ 0

有界

目的関数値≧0

最小化　- x - y
条件　x + y ≧ 0
　　　x, y≧ 0

非有界

任意の$\alpha > 0$に対し(α, α)は許容解

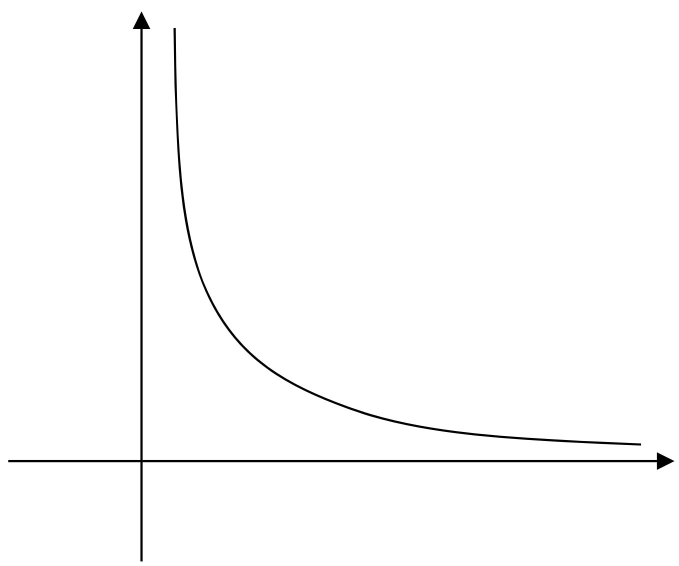
目的関数値＝-2α

LPの基本定理

定理3．1（基本定理, fundamental theorem）
任意のLPに対し、
実行可能かつ有界　⇒　最適解が存在

※非線形計画の場合は成り立つとは限らない！

最小化　y
　条件　xy≧ 1
　　　　x, y≧ 0



最適値＝0
でも y = 0 なる許容解はない

弱双対定理

定理3．2(弱双対定理, weak duality theorem):

x: 主問題の許容解, **y**: 双対問題の許容解

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

主問題の目的関数値　　双対問題の目的関数値

弱双対定理の証明

シグマの順番
を換える

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i \geq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

最小化　$c_1x_1+\cdots+c_nx_n$

条件　$a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \geqq b_1$

$a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n \geqq b_2$

…

$a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n \geqq b_m$

$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$

最大化　$b_1y_1+\cdots+b_my_m$

条件　$a_{11}y_1+\cdots+a_{m1}y_m \leqq c_1$

$a_{12}y_1+\cdots+a_{m2}y_m \leqq c_2$

…

$a_{1n}y_1+\cdots+a_{mn}y_n \leqq c_n$

$y_1 \geqq 0, \ldots, y_m \geqq 0$

弱双対定理の系

系3．１
主問題が非有界　⇒　双対問題は実行不可能
双対問題が非有界　⇒　主問題は実行不可能

証明: 対偶 （双対 : 実行可能⇒主 : 有界） を示す
双対問題が実行可能と仮定

y: 双対問題の許容解、 $\alpha = \sum b_i y_i$
弱双対定理より、主問題の任意の許容解 **x** に対し

$\sum c_j x_j \geqq \alpha$ 　∴ 主問題は有界

弱双対定理の系

系３．２
x: 主問題の許容解, **y**: 双対問題の許容解,
$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ を満たす
⇒ **x**: 主問題の最適解、**y**: 双対問題の最適解

証明→レポート問題

弱双対定理（定理３．２）を使って証明すること

弱双対定理の系

例３．３

最小化 $-2x_1 - x_2 - x_3$

条件
$$-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geqq -4$$
$$-2x_1 - 4x_3 \geqq -4$$
$$4x_1 - 3x_2 + x_3 \geqq -1$$
$$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0$$

最大化 $-4y_1 - 4y_2 - y_3$

条件
$$-2y_1 - 2y_2 + 4y_3 \leqq -2$$
$$-2y_1 - 3y_3 \leqq -1$$
$$y_1 - 4y_2 + y_3 \leqq -1$$
$$y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0,\ y_3 \geqq 0$$

x = (2, 0, 0): 許容解　　　　y = (3/5, 2/5, 0): 許容解

－２×２－０－０＝－４＝－４×（3/5）－４×（2/5）－０

⇒ 系３．２より、 x, y はそれぞれ最適解

双対定理

定理３．３（双対定理, duality theorem）:
主問題または双対問題が最適解をもつ
⇒　他方も最適解をもち、かつ最適値が一致する

証明 → 後日

主問題と双対問題の答えの組合せ

<table>
<tr><td colspan="3" rowspan="3"></td><td colspan="3">双対問題</td></tr>
<tr><td colspan="2">実行可能</td><td rowspan="2">実行不可能</td></tr>
<tr><td>最適解</td><td>非有界</td></tr>
<tr><td rowspan="3">主問題</td><td rowspan="2">実行可能</td><td>最適解</td><td>○
（双対定理）</td><td>×
（系3．1）</td><td>×
（双対定理）</td></tr>
<tr><td>非有界</td><td>×
（系3．1）</td><td>×
（系3．1）</td><td>○
（系3．1）</td></tr>
<tr><td colspan="2">実行不可能</td><td>×
（双対定理）</td><td>○
（系3．1）</td><td>○</td></tr>
</table>

相補性定理(complementarity slackness theorem)

定理３．４:

x: 主問題の許容解，**y**: 双対問題の許容解

x および **y** は最適解

⇕

相補性条件
(complementarity slackness condition)

各 j = 1, ..., n について

$\sum_i a_{ij} y_i \leqq c_j$ と $x_j \geqq 0$ のどちらかは等号成立

各 i = 1, ..., m について

$\sum_j a_{ij} x_j \geqq b_i$ と $y_i \geqq 0$ のどちらかは等号成立

相補性定理の証明

x: 主問題の許容解　　　　**y**: 双対問題の許容解

x、y　は最適解

$\Updownarrow$

$\sum_i a_{ij} y_i = c_j$　または　$x_j = 0$　($\forall j = 1, 2, \ldots, n$)

$\sum_j a_{ij} x_j = b_i$　または　$y_i = 0$ ($\forall i = 1, 2, \ldots, m$)

証明:　　弱双対定理の証明より

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i \geq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

x、yが最適　⇔　最初の項＝最後の項

⇔　$(\sum_i a_{ij} y_i) x_j = c_j x_j$, $(\sum_i a_{ij} x_j) y_i = b_i y_i$　　⇔　相補性

レポート問題

問１：系３．２を証明せよ．

問２：下記の２つのLPの双対問題を求めなさい．

また，それぞれの双対問題が

(a)最適解をもつ，(b)非有界，(c)実行不可能

のいずれに当てはまるか，調べなさい（理由も書くこと）

最小化　$x + 2y$
条件　$-x - y \geqq -3$
$x, y \geqq 0$

最小化　$x + 2y$
条件　$-x - y \geqq 1$
$x, y \geqq 0$

レポート問題

問3：右の線形計画問題について考える.

(a) [P] の双対問題[D]を書きなさい.

(b) [P]と[D]に対する相補性条件をすべて（具体的に）書きなさい.

(c) [P] の最適解のひとつは$x_1 = 2, x_2 = x_3 = 0$である.
相補性定理を使って，双対問題[D]の最適解をすべて計算しなさい．計算の過程も書くこと.

$$
[\mathrm{P}] \quad \left|\; \begin{array}{lrrrl}
\text{最小化} & -2x_1 & -x_2 & +x_3 & \\
\text{条件} & -2x_1 & -2x_2 & +x_3 & \geq -4 \\
 & -2x_1 & & -4x_3 & \geq -4 \\
 & 4x_1 & -3x_2 & +x_3 & \geq 2 \\
 & \multicolumn{4}{c}{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0} \\
\end{array} \right.
$$