

問1: 右の辞書に最小添字規則を適用して解きなさい.

	x_1	x_2	x_3	
z	0	-1	2	-1
x_4	6	-2	2	0
x_5	3	-1	-1	2
x_6	3	-1	-1	-1

基底に入る変数の候補は $x_1, x_3 \rightarrow x_1$ を選択

すると, 基底から出る変数の候補は $x_4, x_5, x_6 \rightarrow x_4$ を選択

基底変数を x_1, x_5, x_6 として, 辞書を書き換え

	x_4	x_2	x_3	
z	-3	$\frac{1}{2}$	1	-1
x_1	3	$-\frac{1}{2}$	1	0
x_5	0	$\frac{1}{2}$	-2	2
x_6	0	$\frac{1}{2}$	-2	-1

基底に入る変数の候補は $x_3 \rightarrow x_3$ を選択

すると, 基底から出る変数の候補は $x_6 \rightarrow x_6$ を選択

基底変数を x_1, x_5, x_3 として, 辞書を書き換え $\rightarrow z$ の式 of 非基底変数の係数がすべて非負なので最適

	x_4	x_2	x_6	
z	-3	0	3	1
x_1	3	$-\frac{1}{2}$	1	0
x_5	0	$\frac{3}{2}$	-6	2
x_3	0	$\frac{1}{2}$	-2	-1

問2: 次の線形計画問題を二段階単体法で解きなさい。

(a) 最小化 $-3x_1 - 2x_2$
条件 $2x_1 - x_2 \geq -1$
 $-x_1 + 2x_2 \geq 4$
 $-x_1 - x_2 \geq -2$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

初期辞書

$$\begin{aligned} z &= -3x_1 - 2x_2 \\ x_3 &= 1 + 2x_1 - x_2 \\ x_4 &= -4 - x_1 + 2x_2 \\ x_5 &= 2 - x_1 - x_2 \end{aligned}$$

許容辞書ではないので、
補助問題を作る

補助問題

最小化 x_a
条件 $2x_1 - x_2 + x_a \geq -1$
 $-x_1 + 2x_2 + x_a \geq 4$
 $-x_1 - x_2 + x_a \geq -2$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_a \geq 0$

初期辞書

$$\begin{aligned} z_a &= \quad \quad \quad +x_a \\ z &= -3x_1 - 2x_2 \\ x_3 &= 1 + 2x_1 - x_2 + x_a \\ x_4 &= -4 - x_1 + 2x_2 + x_a \\ x_5 &= 2 - x_1 - x_2 + x_a \end{aligned}$$

許容辞書ではないので、
ピボット演算を1回行う
定数項の一番小さい x_4 と x_a を入れ替え

$$z_a = 4 + x_1 - 2x_2 + x_4$$

$$z = 0 - 3x_1 - 2x_2$$

$$x_3 = 5 + 3x_1 - 3x_2 + x_4$$

$$x_a = 4 + x_1 - 2x_2 + x_4$$

$$x_5 = 6 - 3x_2 + x_4$$

x_2 と x_3 を入れ替え

$$z_a = 2/3 - x_1 + 2/3x_3 + 1/3x_4$$

$$z = -10/3 - 5x_1 + 2/3x_3 - 2/3x_4$$

$$x_2 = 5/3 + x_1 - 1/3x_3 + 1/3x_4$$

$$x_a = 2/3 - x_1 + 2/3x_3 + 1/3x_4$$

$$x_5 = 1 - 3x_1 + x_3$$

x_1 と x_5 を入れ替え

$$z_a = 1/3 + 1/3x_5 + 1/3x_3 + 1/3x_4$$

$$z = -5 + 5/3x_5 - x_3 - 2/3x_4$$

$$x_2 = 2 - 1/3x_1 + 1/3x_4$$

$$x_a = 1/3 + 1/3x_1 + 1/3x_3 + 1/3x_4$$

$$x_1 = 1/3 - 1/3x_5 + 1/3x_3$$

最適辞書が得られた
補助問題の最適値は $1/3 > 0$
0ではないので, 元のLPは
実行不可能

問2: 次の線形計画問題を二段階単体法で解きなさい。

(b) 最小化 $-3x_1 - 2x_2$
条件 $2x_1 - x_2 \geq -1$
 $-x_1 + 2x_2 \geq 0$
 $x_1 + x_2 \geq 2$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

初期辞書

$$z = -3x_1 - 2x_2$$
$$x_3 = 1 + 2x_1 - x_2$$
$$x_4 = 0 - x_1 + 2x_2$$
$$x_5 = -2 + x_1 + x_2$$

許容辞書ではないので、
補助問題を作る

最小化 x_a
条件 $2x_1 - x_2 + x_a \geq -1$
 $-x_1 + 2x_2 + x_a \geq 0$
 $x_1 + x_2 + x_a \geq 2$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_a \geq 0$

初期辞書

$$z_a = x_a$$
$$z = -3x_1 - 2x_2$$
$$x_3 = 1 + 2x_1 - x_2 + x_a$$
$$x_4 = 0 - x_1 + 2x_2 + x_a$$
$$x_5 = -2 + x_1 + x_2 + x_a$$

許容辞書ではないので、
ピボット演算を1回行う
定数項の一番小さい x_5 と x_a を入れ替え

$$z_a = 2 - x_1 - x_2 + x_5$$

$$z = 0 - 3x_1 - 2x_2$$

$$x_3 = 3 + x_1 - 2x_2 + x_5$$

$$x_4 = 2 - 2x_1 + x_2 + x_5$$

$$x_a = 2 - x_1 - x_2 + x_5$$

x_1 と x_4 を入れ替え

$$z_a = 1 + 1/2x_4 - 3/2x_2 + 1/2x_5$$

$$z = -3 + 3/2x_4 - 7/2x_2 - 3/2x_5$$

$$x_3 = 4 - 1/2x_4 - 3/2x_2 + 3/2x_5$$

$$x_1 = 1 - 1/2x_4 + 1/2x_2 + 1/2x_5$$

$$x_a = 1 + 1/2x_4 - 3/2x_2 + 1/2x_5$$

x_2 と x_a を入れ替え

$$z_a = 0 \quad + x_a$$

$$z = -16/3 + 1/3x_4 + 7/3x_a - 8/3x_5$$

$$x_3 = 3 - x_4 + x_a + x_5$$

$$x_1 = 4/3 - 1/3x_4 - 1/3x_a + 2/3x_5$$

$$x_2 = 2/3 + 1/3x_4 - 2/3x_a + 1/3x_5$$

最適辞書が得られた

補助問題の最適値は0なので、

元のLPは実行可能

→ z_a の行と x_a の列を削除して、
元の問題の許容辞書を作る

$$\begin{aligned}z &= -16/3 + 1/3x_4 - 8/3x_5 \\x_3 &= 3 - x_4 + x_5 \\x_1 &= 4/3 - 1/3x_4 + 2/3x_5 \\x_2 &= 2/3 + 1/3x_4 + 1/3x_5\end{aligned}$$

基底に入る変数は x_5
変数 x_5 は無限に増やす事ができ、
それによって z も無限に大きくなる
→ このLPは非有界である