

数理計画法

(数理最適化) 第9回

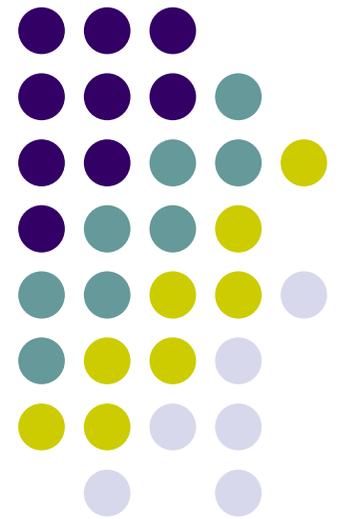
ネットワーク最適化

増加路アルゴリズムの正当性と
最大フロー最小カット定理
最小費用流問題

担当： 塩浦昭義

(情報科学研究科 准教授)

shioura@dais.is.tohoku.ac.jp

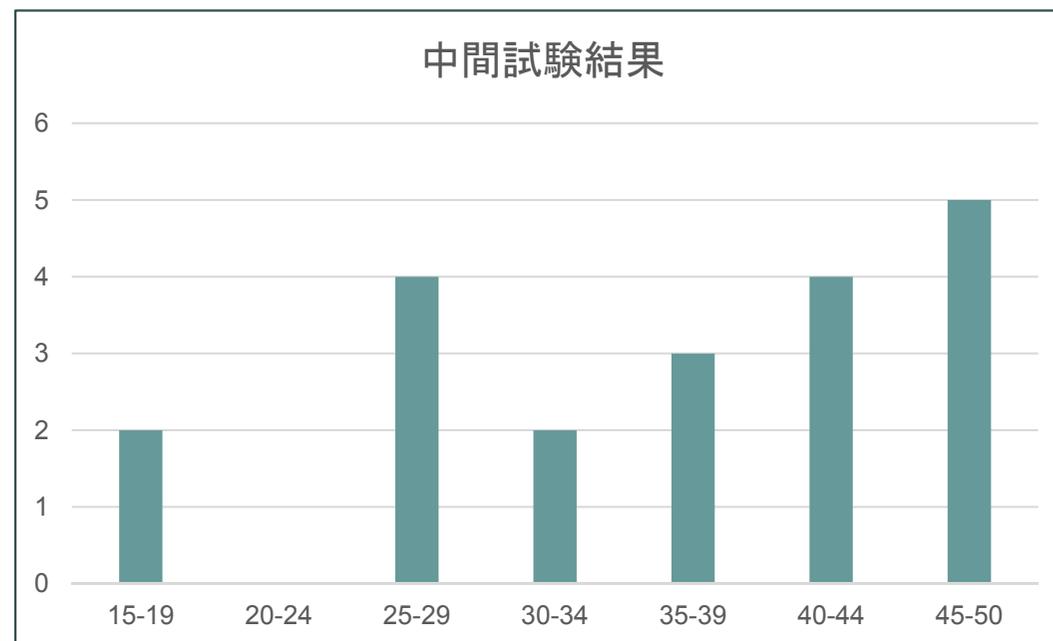




中間試験の結果

- 受験人数: 20人
- 平均点: 36.7/50点満点
- 最高: 50点(ひとりいました!)
- 30点未満(不合格)は6人
- 25-29点の不合格者は救済有り(連絡済み)

	問1	問2	問3	問4
平均	7.5	7.4	11.7	10.3
配点	10	10	16	14



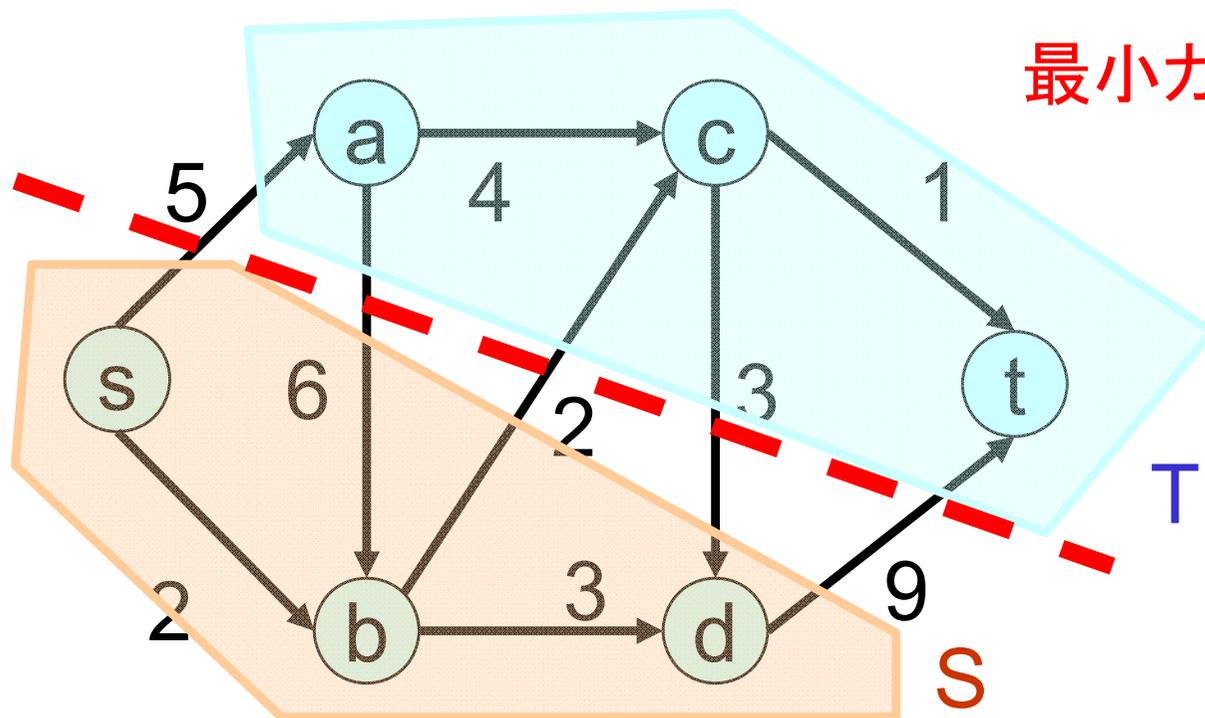
カット



フローを流すとき、ネットワークのボトルネックはどこ？

カット (S, T) : S, T は頂点集合 V の分割 ($S \cap T = \emptyset, S \cup T = V$)
 S はソース s を含む, T はシンク t を含む

カット (S, T) の容量 $C(S, T) = S$ から T へ向かう枝の容量の和



最小カット: 容量が最小のカット

$$C(S, T) = 5 + 2 + 9 = 16$$

カットの性質(その1)



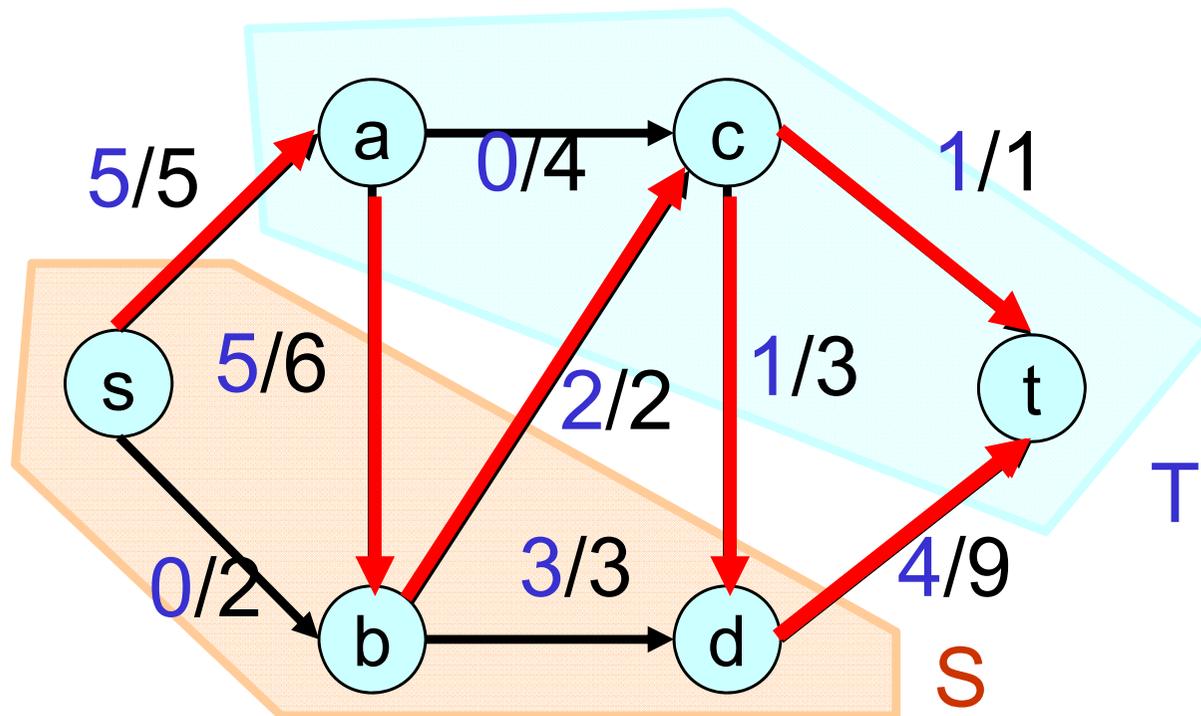
性質1:

任意のカット (S, T) と任意の実行可能フロー $(x_{ij} \mid (i,j) \in E)$ に対し

S から T への枝のフローの和 $x(S, T)$

— T から S への枝のフローの和 $x(T, S)$

= フローの総流量 f



$$f = 1 + 4 = 5$$

$$x(S, T) = 5 + 2 + 4 = 11$$

$$x(T, S) = 5 + 1 = 6$$

$$f = 11 - 6 = 5$$

カットの性質(その1)



下記のネットワークの場合の証明:

頂点 $s, b, d \in S$ に関する流量保存条件を足し合わせる

$$(x_{bc} + x_{bd}) - (x_{sb} + x_{ab}) = 0$$

$$x_{dt} - (x_{cd} + x_{bd}) = 0$$

$$x_{sa} + x_{sb} = f$$

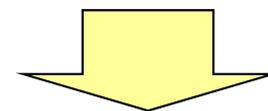
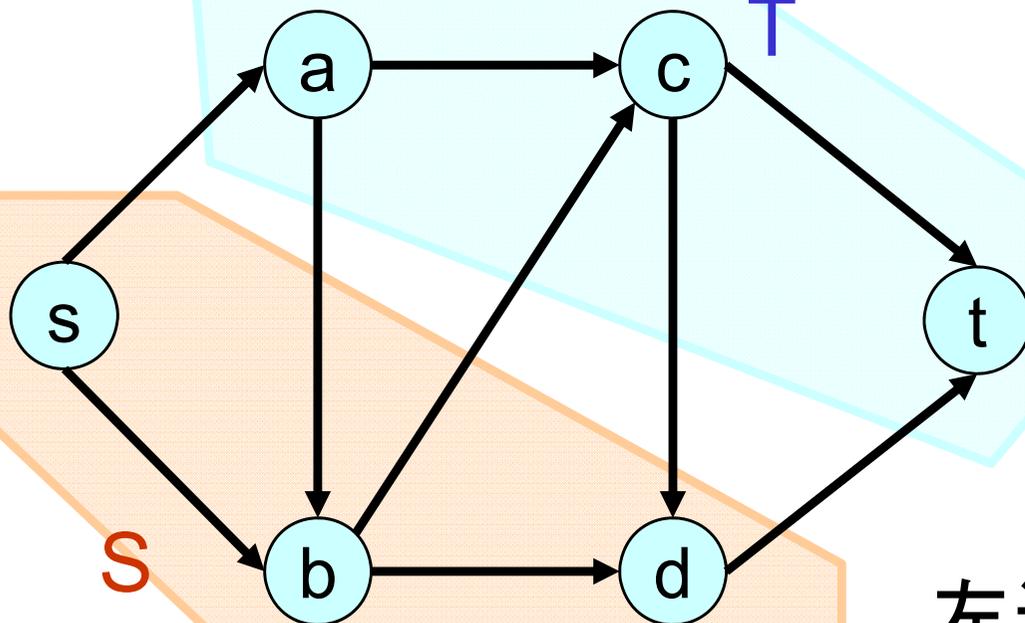
左辺の和をとる

SからTへの枝の変数 x_{ij} は
係数が+1

TからSへの枝の変数 x_{ij} は
係数が-1

SからSへの枝の変数 x_{ij} は
打ち消される

TからTへの枝の変数 x_{ij} は
登場しない



$$\text{左辺} = (x_{sa} + x_{bc} + x_{dt}) - (x_{ab} + x_{cd})$$

カットの性質(その1)



一般の場合の証明: 下記の制約式を足し合わせる

$$\begin{aligned} & \sum\{x_{kj} \mid (k,j) \text{ は } k \text{ から出る}\} \\ & \quad - \sum\{x_{ik} \mid (i,k) \text{ は } k \text{ に入る}\} = 0 \quad (k \in S - \{s\}) \\ & \sum\{x_{sj} \mid (s,j) \text{ は } s \text{ から出る}\} - \sum\{x_{is} \mid (i,s) \text{ は } s \text{ に入る}\} = f \end{aligned}$$

左辺の和をとる

SからTへの枝の変数 x_{ij} は係数が+1

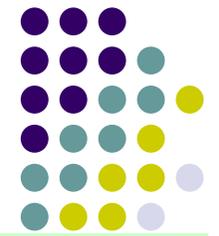
TからSへの枝の変数 x_{ij} は係数が-1

SからSへの枝の変数 x_{ij} は打ち消される

TからTへの枝の変数 x_{ij} は登場しない

$$\Rightarrow \text{左辺} = x(S, T) - x(T, S)$$

カットの性質(その2)



性質2: 任意のカット (S, T) とフロー $(x_{ij} \mid (i,j) \in E)$ に対し
フローの総流量 $f \leq$ カットの容量 $C(S, T)$

証明:

$$f = x(S, T) - x(T, S)$$

(性質1)

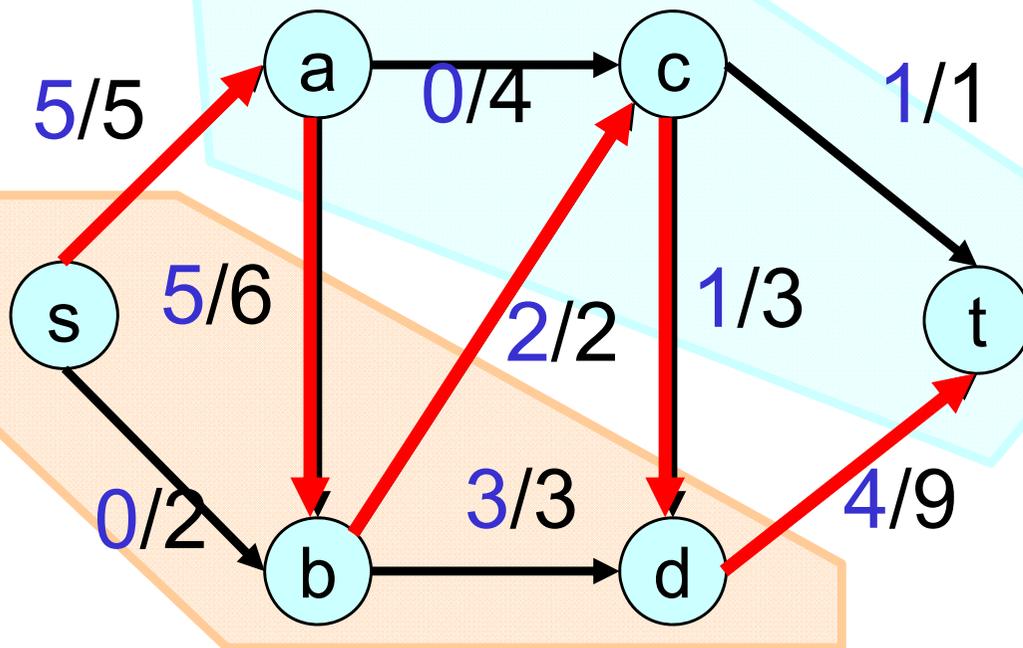
$$x(S, T) \leq C(S, T)$$

(容量条件)

$$x(T, S) \geq 0$$

(フローは非負)

$$\therefore f \leq C(S, T) - 0 = C(S, T)$$



$$f = 5 \leq 16 = C(S, T)$$

最小カット問題



性質2：任意の**カット**と**フロー**に対し
フローの総流量 \leq カットの容量

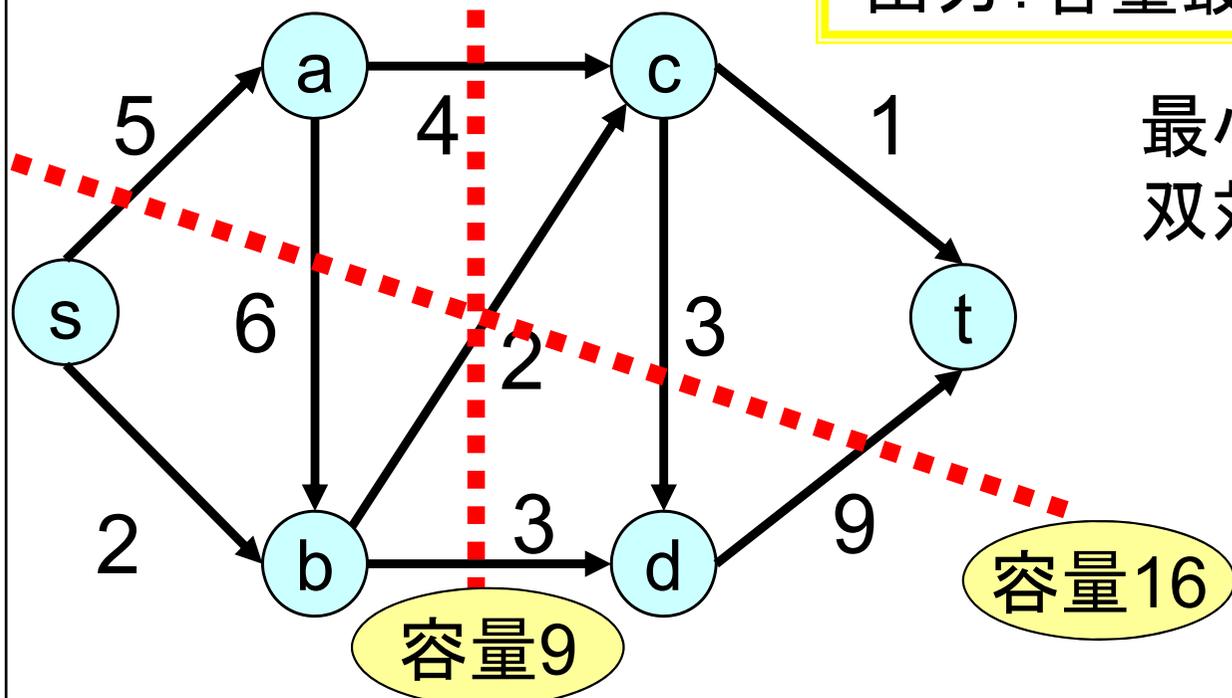
LPの弱双対定理
に対応

➡ カットの容量は、最大フローの総流量に対する上界

最小カット問題

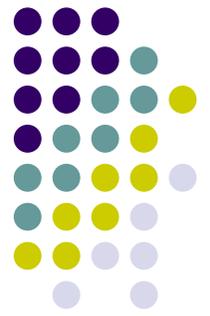
より良い上界を求めたい⇒

入力：グラフ $G = (V, E)$, 頂点 $s, t \in V$
出力：容量最小の s - t カット (**最小カット**)



最小カット問題は最大流問題の
双対問題

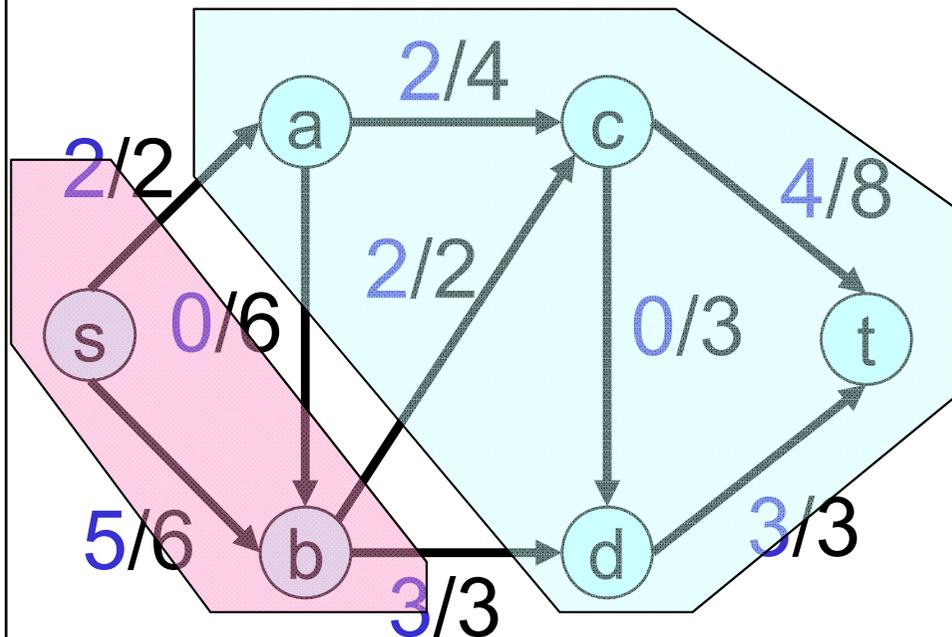
カットの性質(その3)



性質2より次が導かれる

性質3： 任意のカット(S, T) とフロー $(x_{ij} \mid (i,j) \in E)$ に対し
フローの総流量 f = カットの容量 $C(S,T)$ が成り立つ
→ 現在のフローは最大フロー, カットは最小カット

※増加路アルゴリズムの正当性の
証明に使用



$$f = 7, \quad C(S, T) = 7$$

→ 現在のフローは最大フロー,
カットは最小カット

最大フロー最小カット定理



増加路アルゴリズムの正当性の証明

定理：増加路アルゴリズムは**最大フロー**を求める。

また、

S = 残余ネットワークで s より到達可能な頂点集合

$T = V - S$

とすると、 (S, T) は **最小カット** .

さらに、 **$f = C(S, T)$** が成立

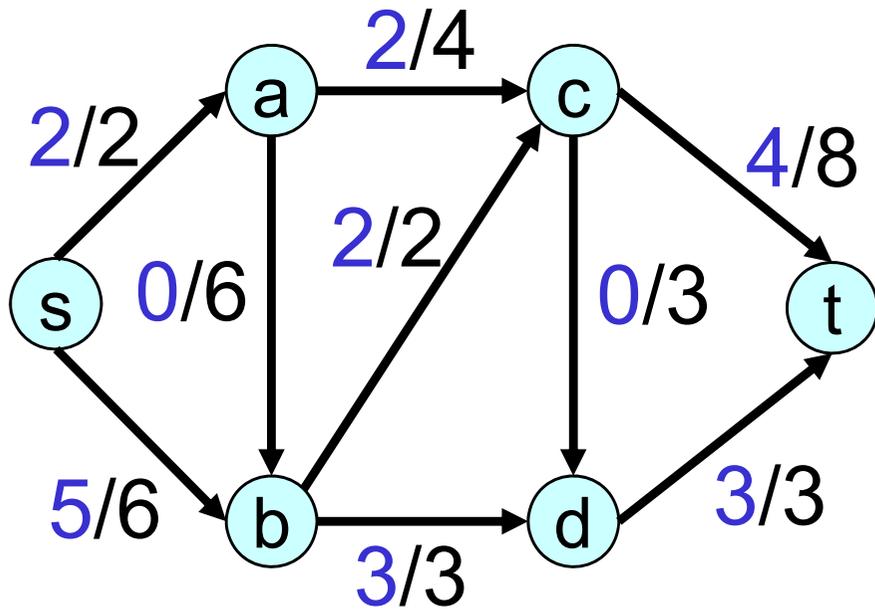
この性質より、「**最大フローの総流量 = 最小カットの容量**」が成立

最大フロー最小カット定理：

最大フロー $(x_{ij} \mid (i, j) \in E)$ と**最小カット** (S, T) に対し

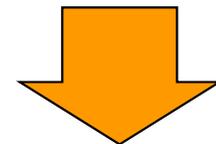
$$f = C(S, T)$$

増加路アルゴリズムの正当性(その1)

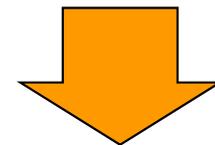


目標: アルゴリズム終了時のフローに対し, $f = C(S, T)$ を満たすカット (S, T) を見つける \rightarrow 性質3より最大フロー

アルゴリズム終了時のフローに対して残余ネットワークを作る



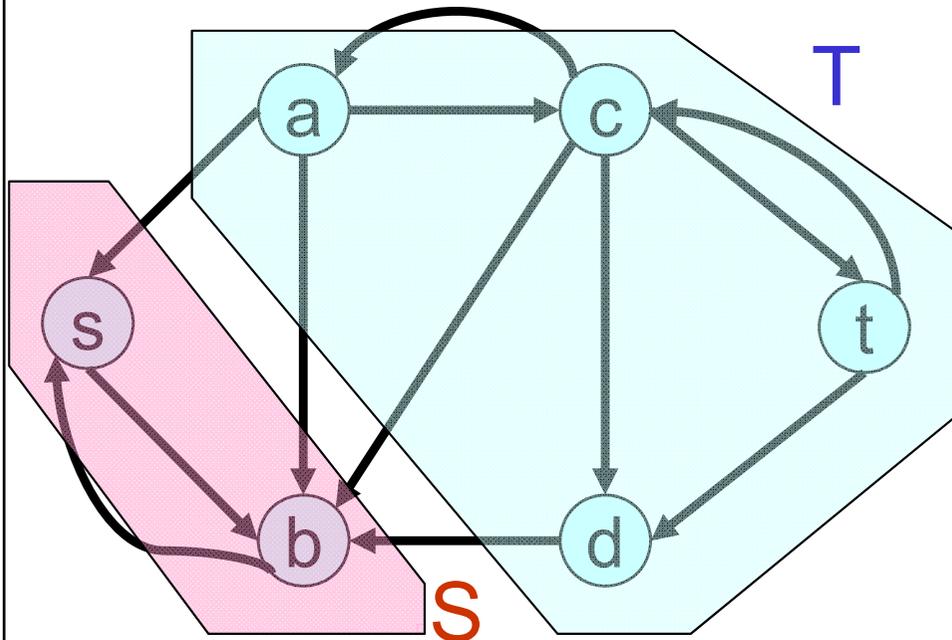
残余ネットワークには増加路がない



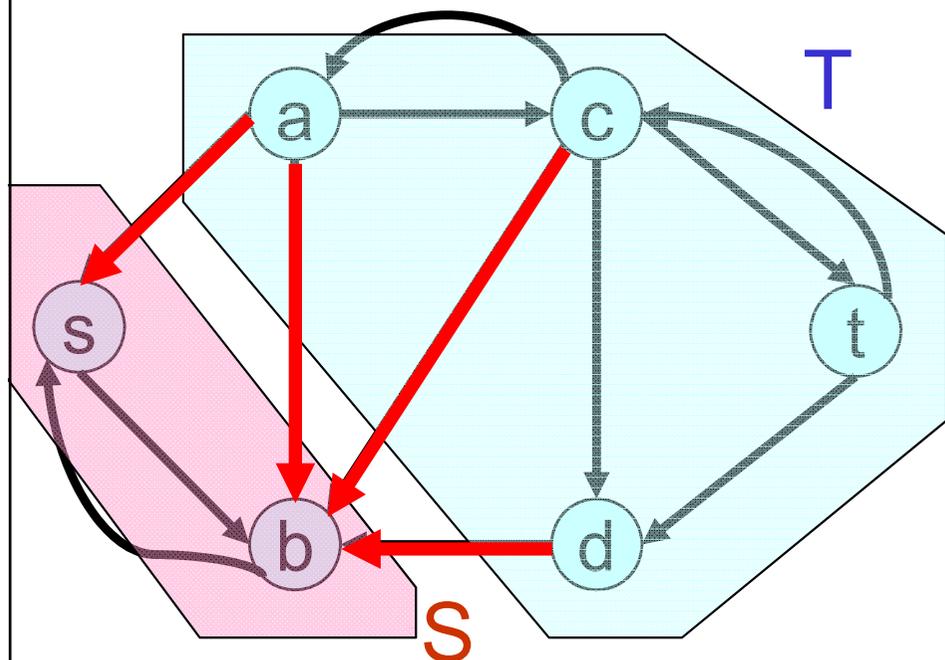
$S =$ 残余ネットワークにおいて s から到達可能な頂点集合

$T = V - S$

に対し、 (S, T) はカット

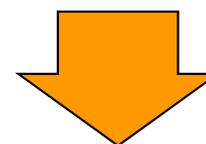


増加路アルゴリズムの正当性(その2)



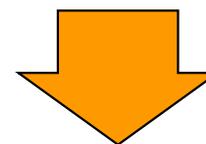
$S = s$ から到達可能な頂点集合

$T = V - S$



残余ネットワークにおいて

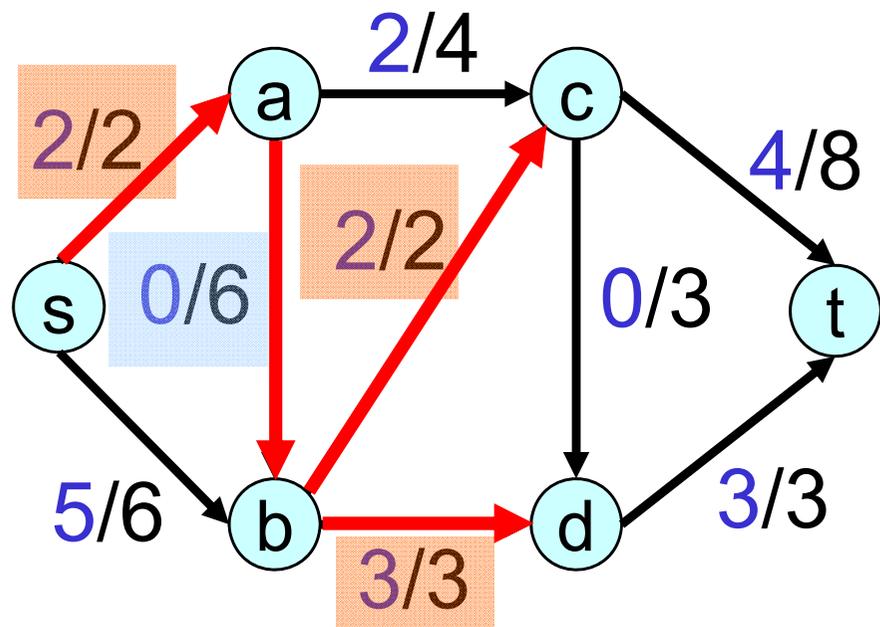
S から T に向かう枝は存在しない



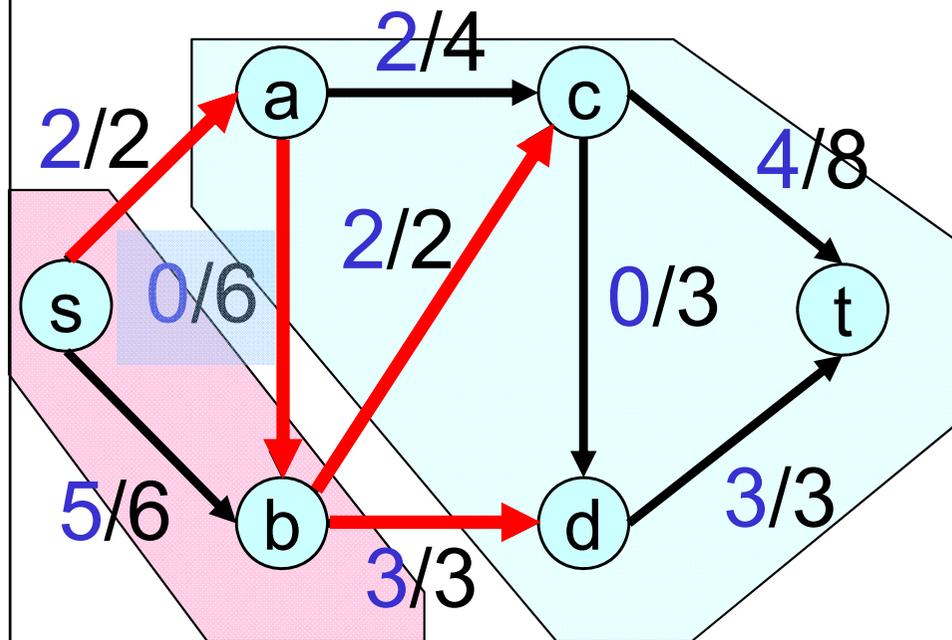
元のネットワークにおいて

S から T に向かう枝では $x_{ij} = u_{ij}$

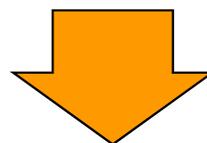
T から S に向かう枝では $x_{ij} = 0$



増加路アルゴリズムの正当性(その3)



元のネットワークにおいて
 SからTに向かう枝では $x_{ij} = u_{ij}$
 TからSに向かう枝では $x_{ij} = 0$

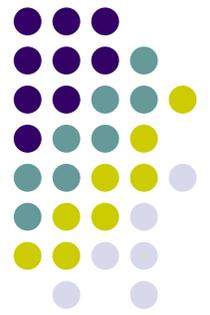


$$\begin{aligned}
 x(S, T) &= \sum\{x_{ij} \mid (i,j) \text{ は } S \text{ から } T \text{ へ 向かう 枝}\} \\
 &= \sum\{u_{ij} \mid (i,j) \text{ は } S \text{ から } T \text{ へ 向かう 枝}\} = C(S, T) \\
 x(T, S) &= \sum\{x_{ij} \mid (i,j) \text{ は } T \text{ から } S \text{ へ 向かう 枝}\} = 0 \\
 \therefore x(S, T) - x(T, S) &= C(S, T)
 \end{aligned}$$

性質1より $f = x(S, T) - x(T, S)$

$$\therefore f = C(S, T) \quad (\text{証明終わり})$$

応用：供給・需要を満たすフローを求める



入力：有向グラフ $G = (V, E)$

各枝 $(i, j) \in E$ の容量 $u_{ij} \geq 0$

各頂点 $i \in V$ の供給・需要量 b_i (ただし b_i の和は0)

($b_i > 0 \rightarrow i$ は供給点, $< 0 \rightarrow i$ は需要点, $= 0 \rightarrow i$ は通過点)

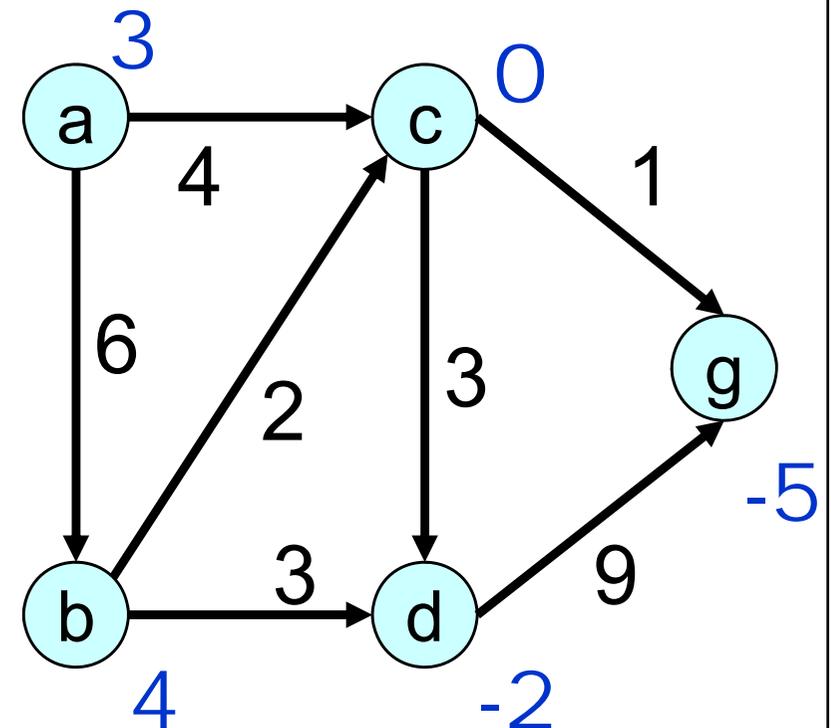
出力：次の条件を満たすフロー

●各頂点 $i \in V$ での供給・需要条件
(i から流出するフロー量)

—(i に流入するフロー量) = b_i

●各枝 (i, j) の容量条件

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$$

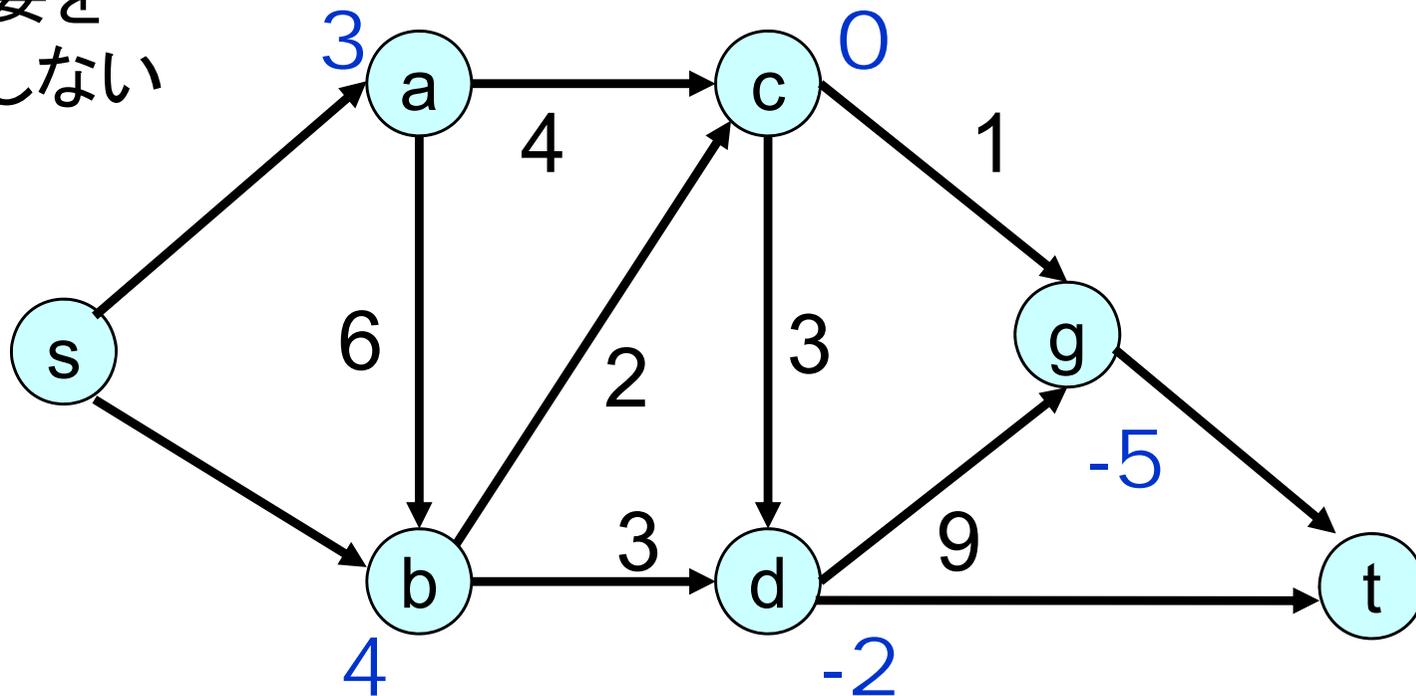


応用: 供給・需要を満たすフローを求める



最大流問題に帰着

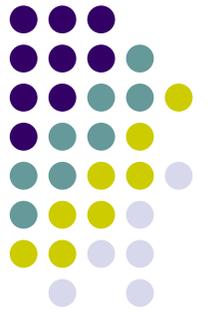
- (1) 新たな頂点 s (ソース), t (シンク) を追加
- (2) $b_i > 0$ ならば枝 (s, i) を追加, 容量は b_i
- (3) $b_i < 0$ ならば枝 (i, t) を追加, 容量は $-b_i$
- (4) 最大フローを求める.
- (5) 各枝 (s, i) に対し $x_{si} = b_i \rightarrow$ 供給・需要を満たすフローが得られる
それ以外 \rightarrow 供給・需要を満たすフローは存在しない





最小費用流問題

最小費用流問題



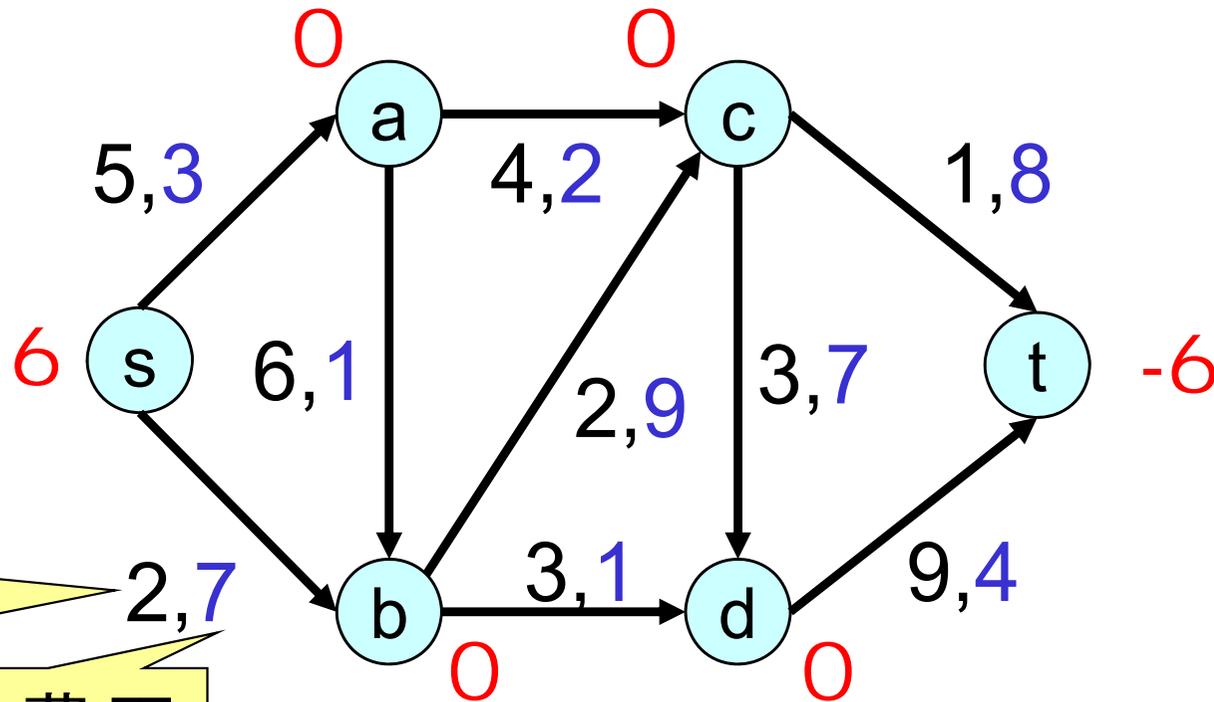
入力: 有向グラフ $G = (V, E)$

各頂点 $i \in V$ の供給・需要量 b_i (ただし b_i の和は0)

($b_i > 0 \rightarrow i$ は供給点, $< 0 \rightarrow i$ は需要点, $= 0 \rightarrow i$ は通過点)

各枝 $(i, j) \in E$ の容量 $u_{ij} \geq 0$, 費用 c_{ij}

出力: 需要供給を満たすフローで総費用が最小のもの



枝の容量

枝の費用

最小費用フロー問題：定式化



目的：最小化 $\sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij}$

(各枝の費用
× フロー量) の和

条件 $0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad ((i,j) \in E)$

各枝の容量条件

$\sum\{x_{kj} \mid (k,j) \text{ は } k \text{ から出る枝}\}$
 $- \sum\{x_{ik} \mid (i,k) \text{ は } k \text{ に入る枝}\} = b_i \quad (k \in V)$

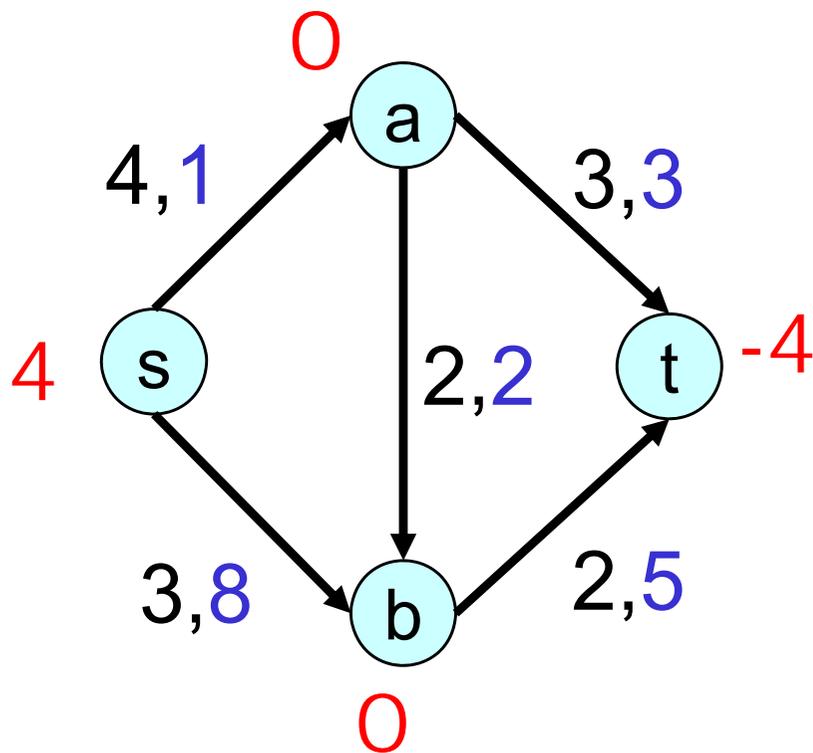
各頂点での
流量保存条件
(需要供給量に
関する条件)

これも線形計画問題

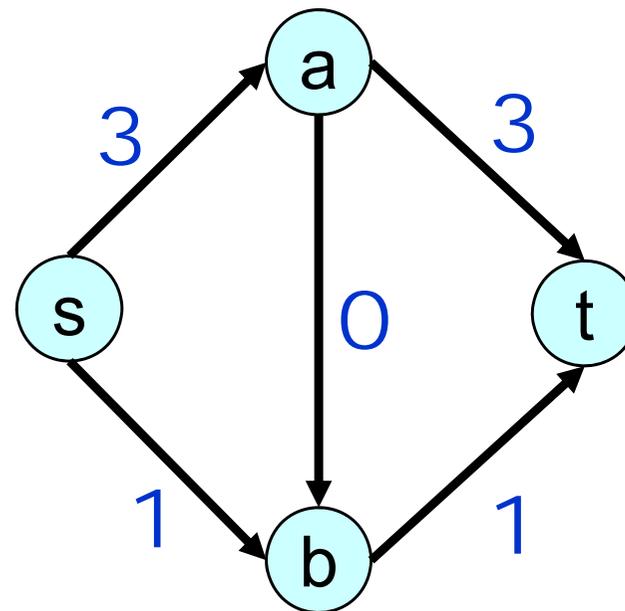
フローの最適性判定



フローの例



問題例



フローの費用 = 25
最小か？

どうやって最小費用フローであることを判定するか？

——— 残余ネットワークの利用

残余ネットワークの作り方(その1)



最大流のときとほとんど同じ作り方

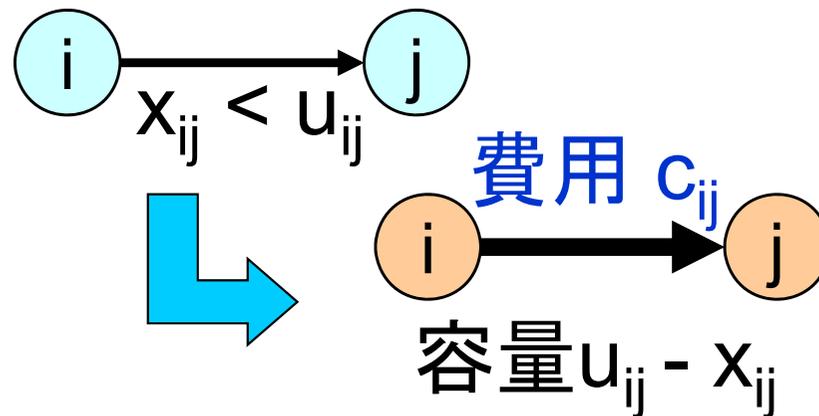
$x = (x_{ij} \mid (i,j) \in E)$: 現在のフロー

→ フロー x に関する残余ネットワーク $G^x = (V, E^x)$
 $E^x = F^x \cup R^x$

順向きの枝集合

$F^x = \{ (i, j) \mid (i, j) \in E, x_{ij} < u_{ij} \}$

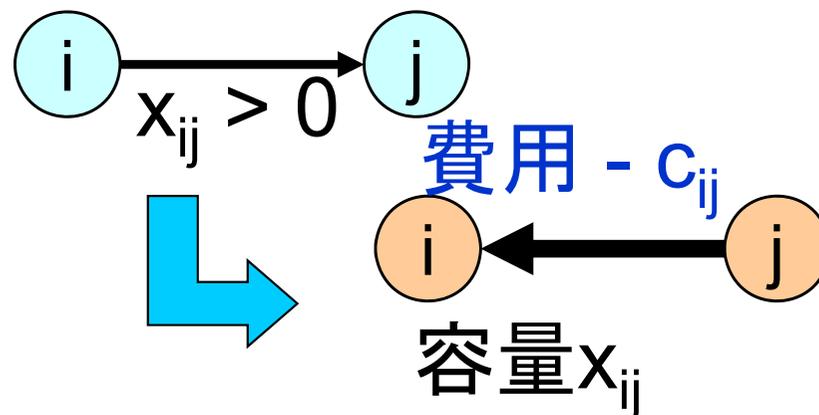
容量 $u^x_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$, 費用 c_{ij}



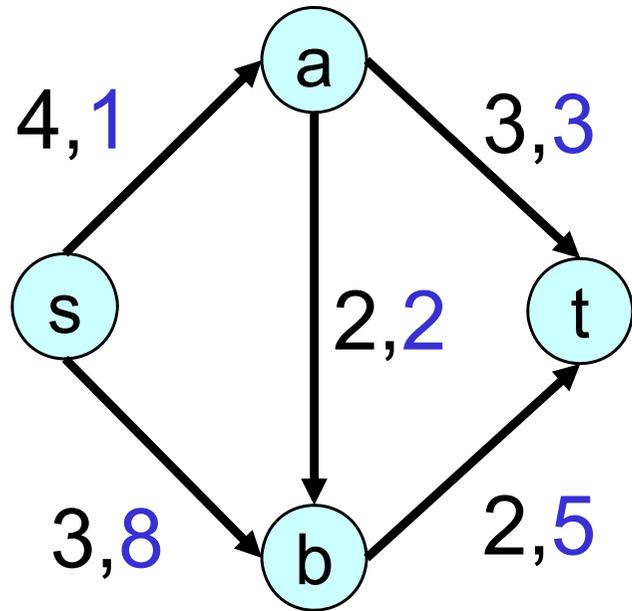
逆向きの枝集合

$R^x = \{ (j, i) \mid (i, j) \in E, x_{ij} > 0 \}$

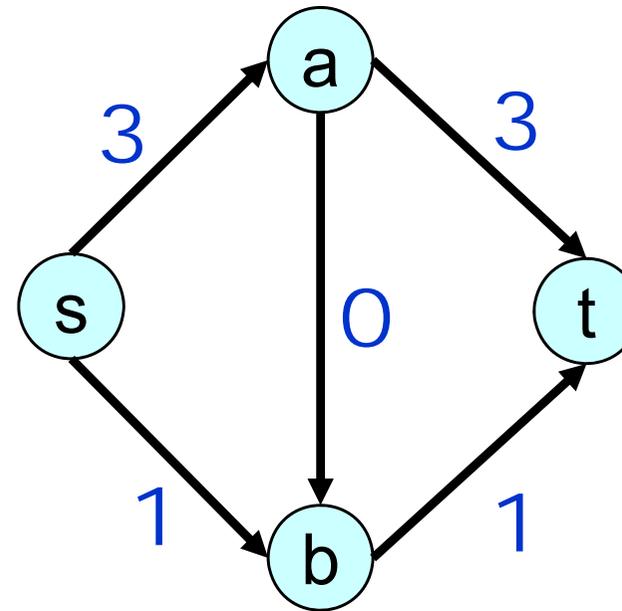
容量 $u^x_{ji} = x_{ij}$, 費用 $-c_{ij}$



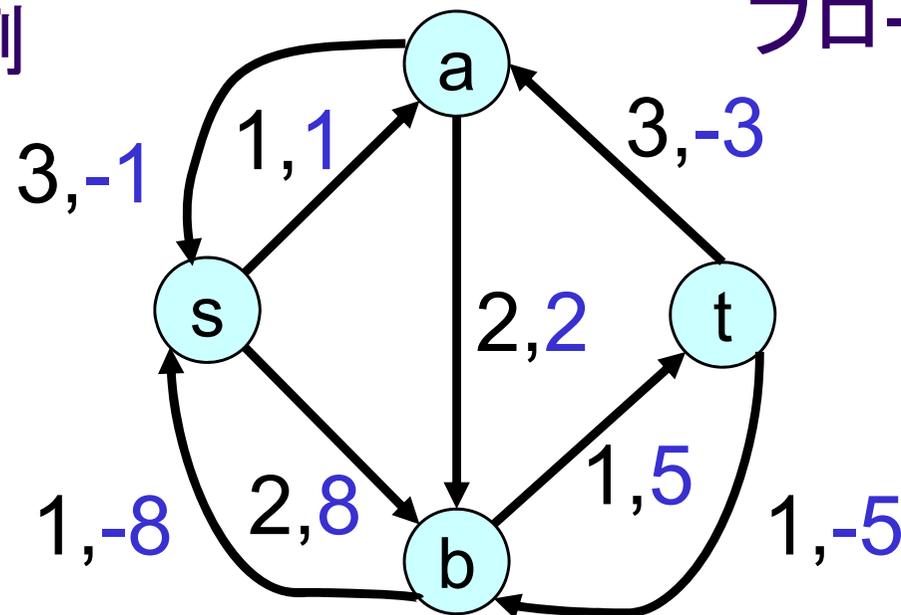
残余ネットワークの作り方(その2)



問題例



フローの例



残余ネットワーク

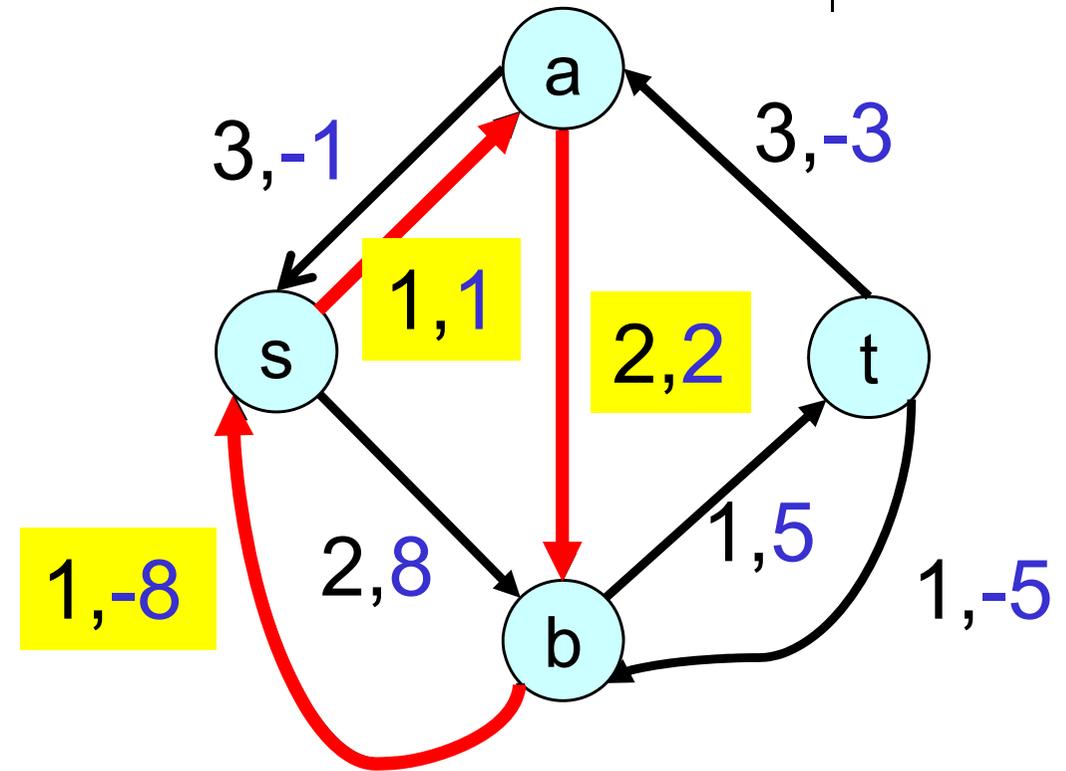
残余ネットワークの性質(1)



残余ネットワークの閉路に注目

閉路の容量 α
= 閉路に含まれる枝の
容量の最小値 = 1

閉路の費用 γ
= 閉路に含まれる枝の
費用の和 = -5



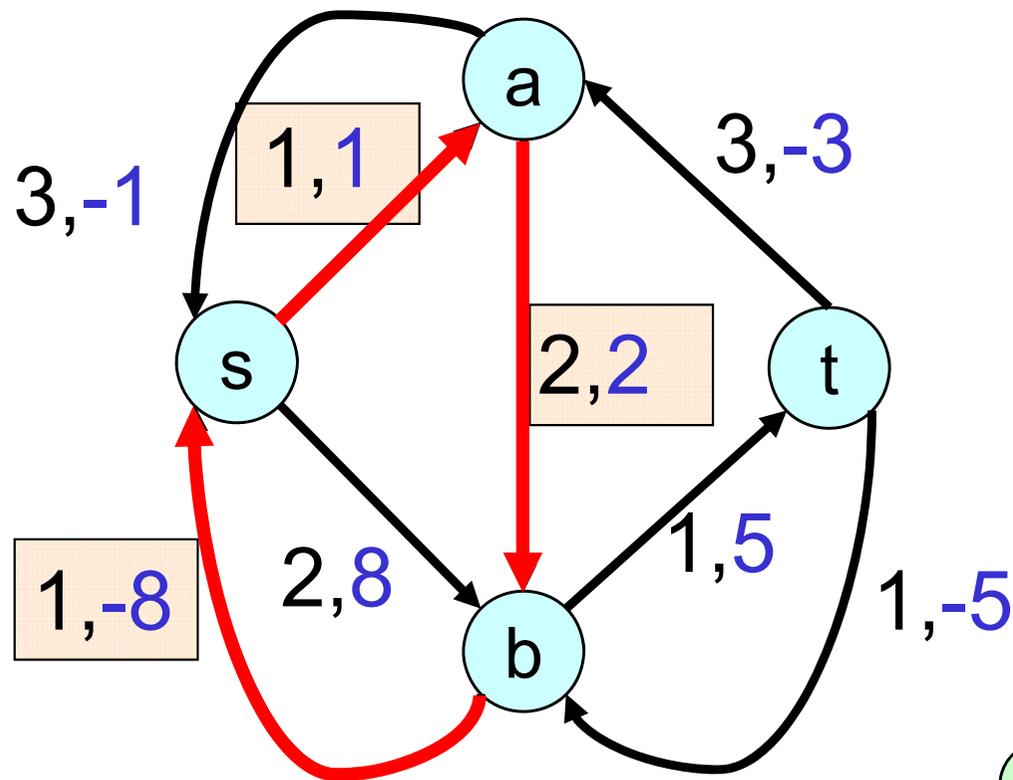
定理 1 : 残余ネットワークに費用が負の閉路が存在
⇒ フローの費用を減少させることが可能
⇒ 現在のフローは費用最小でない

定理1の証明の概略



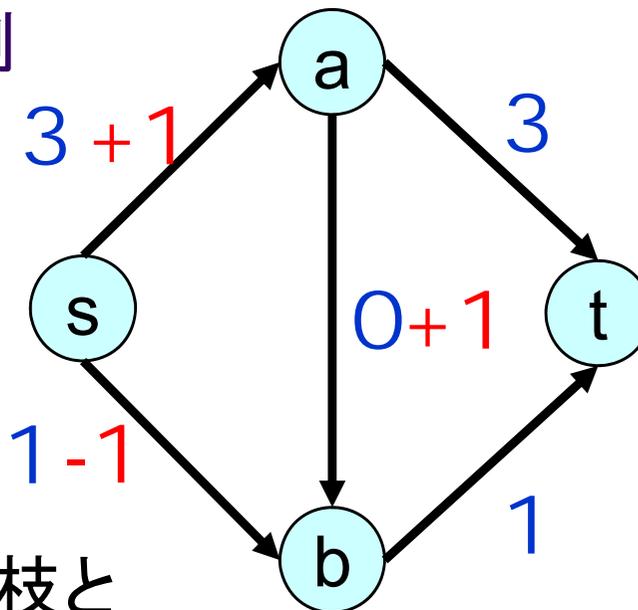
費用が負の閉路を用いて、フローの費用を減少できる

残余ネットワーク



閉路の容量 $\alpha = 1$
閉路の費用 $\gamma = -5$

フローの例

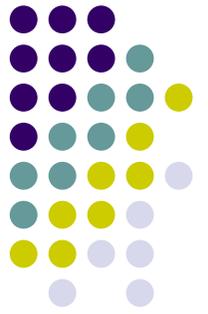


閉路の枝と

同じ向き \Rightarrow フロー値に $+\alpha$
逆の向き \Rightarrow フロー値に $-\alpha$
無関係 \Rightarrow フロー値は **不変**

この更新により、フローの費用は
 $\alpha \gamma (= -5)$ 変化
(より費用の小さいフローを得る)

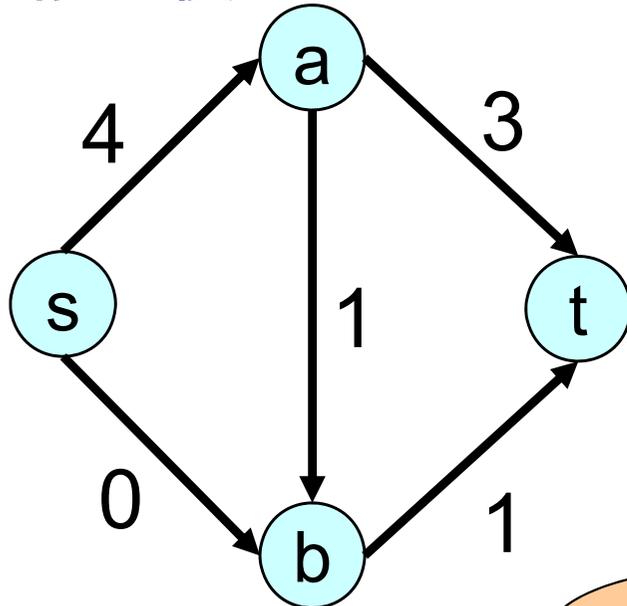
残余ネットワークの性質(2)



実は, 定理1の逆も成り立つ(証明は省略)

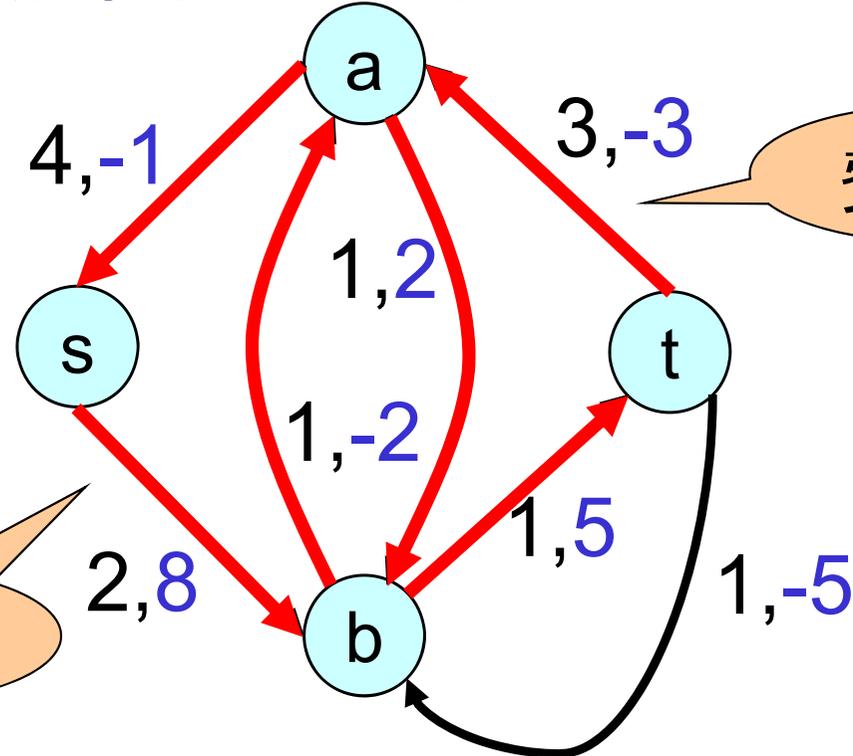
定理2 : 現在のフローは費用最小でない
⇒ 残余ネットワークに費用が負の閉路が存在

修正後のフロー



費用5

残余ネットワーク



費用4

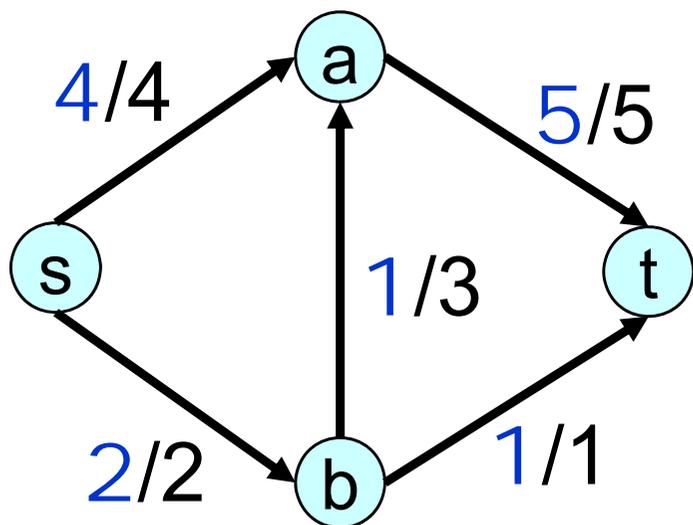
費用が負の閉路がない ⇒ 現在のフローは費用最小

レポート問題

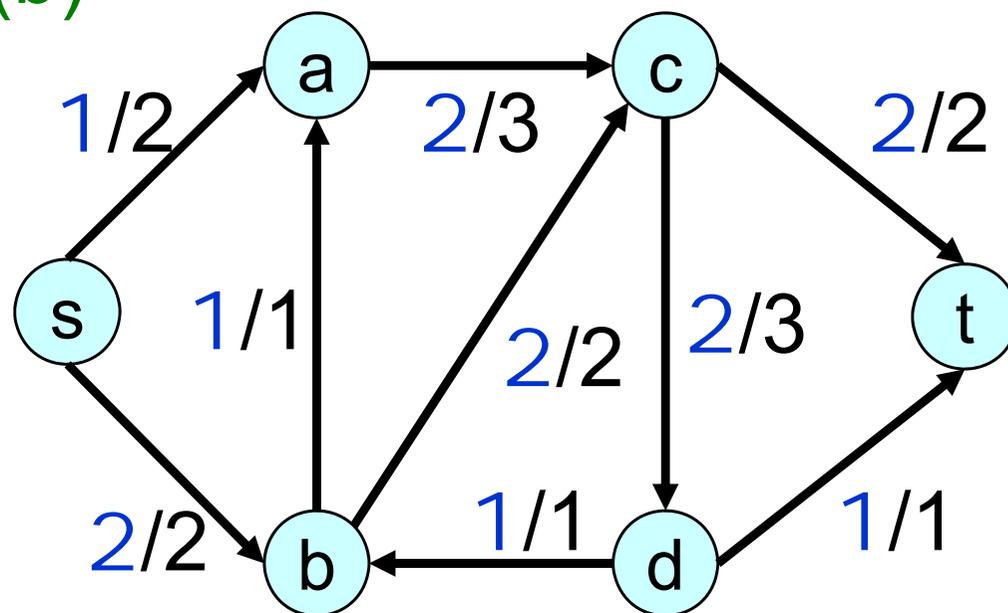


問1 : 下記の図は, 最大流問題およびその最大フローを表す.
これらのフローに対し, 残余ネットワークを書きなさい.
また, 授業でやったやり方に従って最小カットを求めよ

(a)



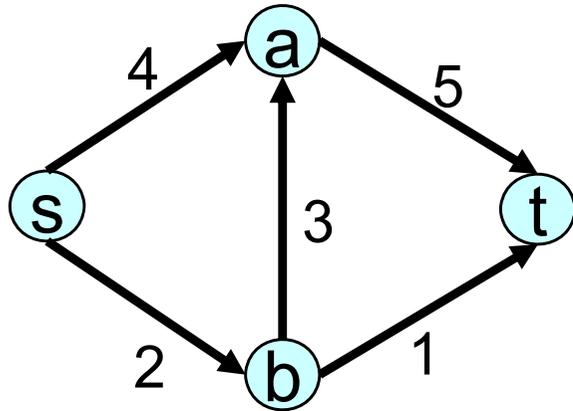
(b)



レポート問題



問 2 : 次のネットワークにおいて, $S=\{s, a\}$, $T=\{b, t\}$ としたときに, $x(S, T) - x(T, S) = f$ が成り立つことを, 下記の定式化を使って証明しなさい.



最大化 f
条件

$$x_{sa} + x_{sb} = f$$
$$x_{at} - x_{sa} - x_{ba} = 0$$
$$x_{ba} + x_{bt} - x_{sb} = 0$$
$$-x_{at} - x_{bt} = -f$$
$$0 \leq x_{sa} \leq 4, 0 \leq x_{sb} \leq 2, 0 \leq x_{ba} \leq 3,$$
$$0 \leq x_{at} \leq 5, 0 \leq x_{bt} \leq 1$$

問 3 : 右のネットワークにおいて, 最小カットが $(\{s, b, d\}, \{t, a, c\})$ となるように, 各枝の容量を設定しなさい. (全部の枝の容量を 0 とするのは不可)

