# 最適化基礎
# 第９回
# 最大流問題と増加路アルゴリズム

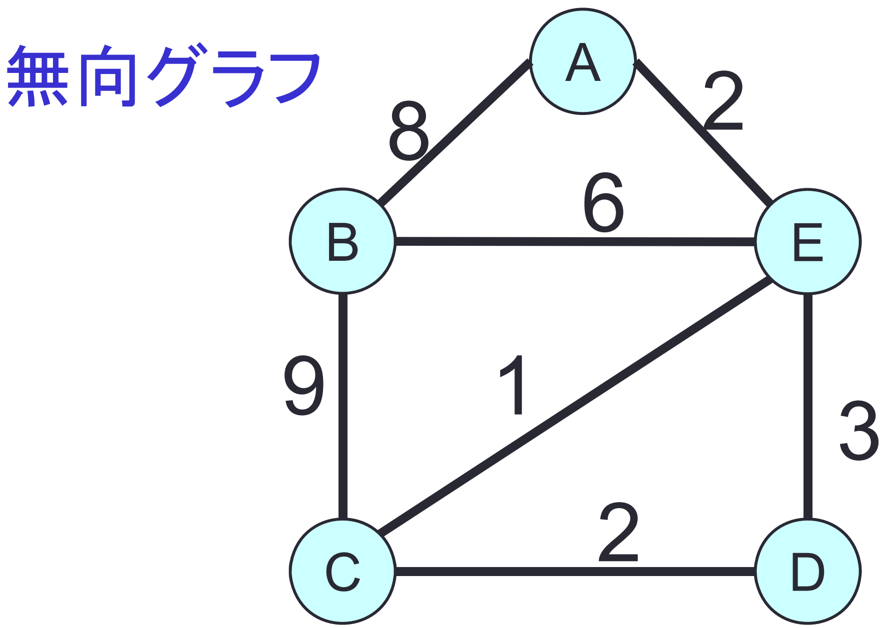
塩浦昭義
東京工業大学 社会工学専攻 准教授
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp
http://www.soc.titech.ac.jp/~shioura/teaching

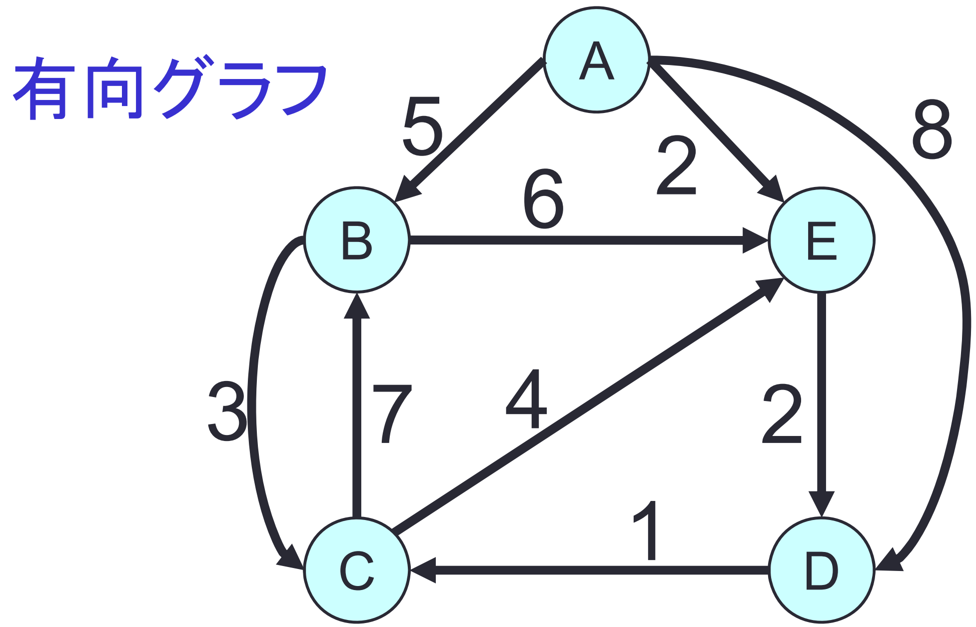
# 塩浦担当分の参考書

- 室田一雄，塩浦昭義:「離散凸解析と最適化アルゴリズム」，
  朝倉書店，2013年
- 繁野麻衣子:「ネットワーク最適化とアルゴリズム」，
  朝倉書店，2010年
- 久野誉人，繁野麻衣子，後藤順哉:「数理最適化」，
  オーム社，2012年
- 福島雅夫:「数理計画入門」，朝倉書店，2011年

# ネットワーク最適化問題

- (無向, 有向)グラフ
  - 頂点(vertex, 接点, 点)が枝(edge, 辺, 線)で結ばれたもの
- ネットワーク
  - 頂点や枝に数値データ(距離, コストなど)が付加されたもの
- ネットワーク最適化問題
  - ネットワークを使って表現される組合せ最適化問題



# ネットワーク最適化問題の例

「ネットワーク」に関する数理計画問題

最小木問題

(minimum spanning tree prob.)

最短路問題

(shortest path prob.)

最大流問題

(maximum flow prob.)

最小費用流問題

(minimum cost flow prob.)

割当問題

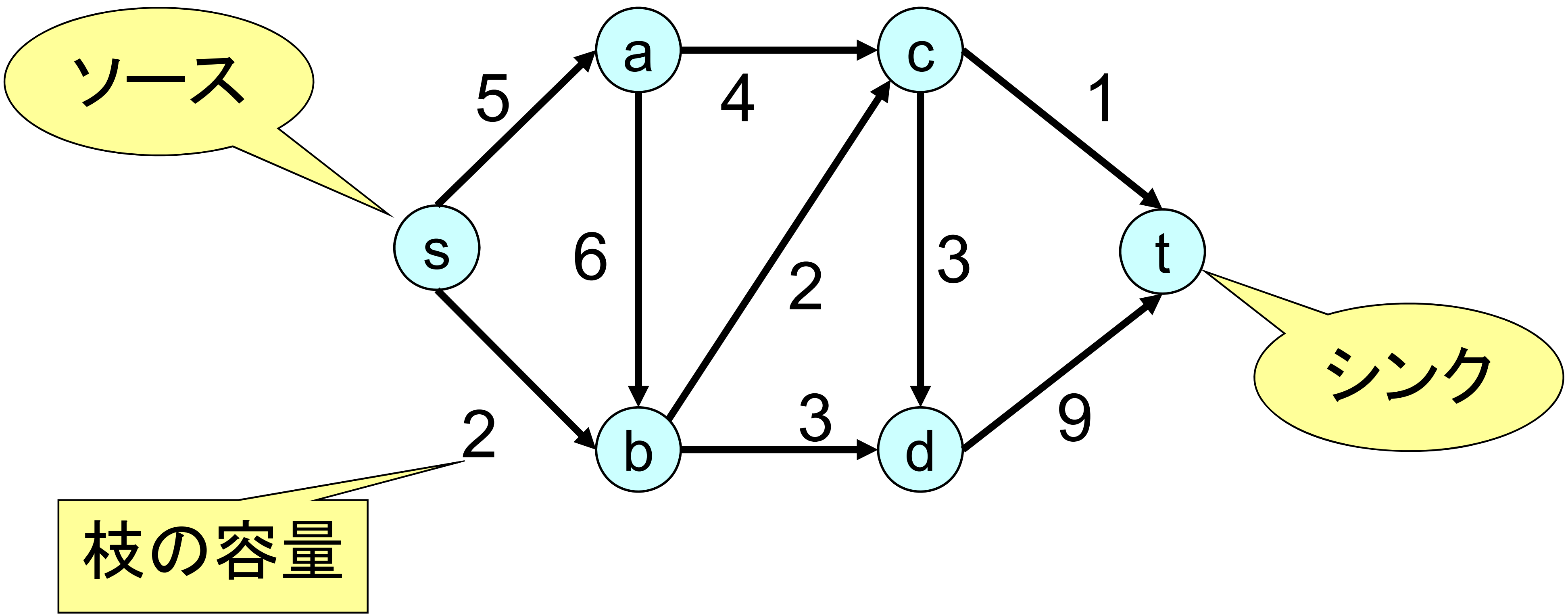
(assignment prob.)

# 最大流問題の定義(その1)

入力: 有向グラフ G = (V, E)

ソース(供給点) $s \in V$, シンク(需要点) $t \in V$

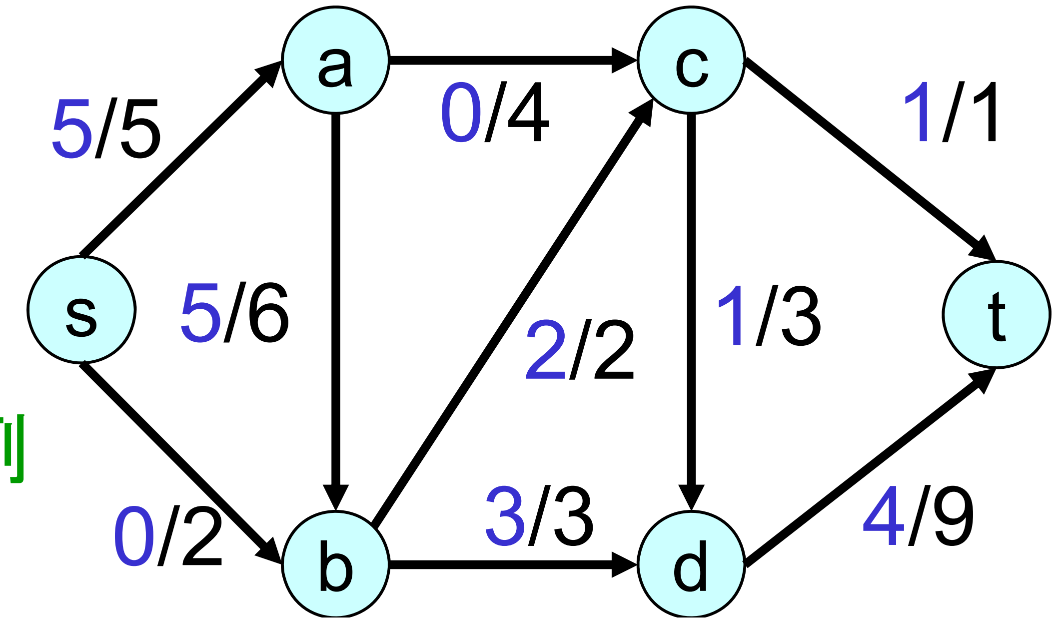
各枝 $(i, j) \in V$ の容量 $u_{ij} \geqq 0$



# 最大流問題の定義(その2)

目的:ソースからシンクに向けて,枝と頂点を経由して
「もの」を出来るだけたくさん流す

条件1(容量条件):
0 ≦ 各枝を流れる「もの」の量 ≦ 枝の容量
条件2(流量保存条件):
頂点から流れ出す「もの」の量＝　流れ込む「もの」の量

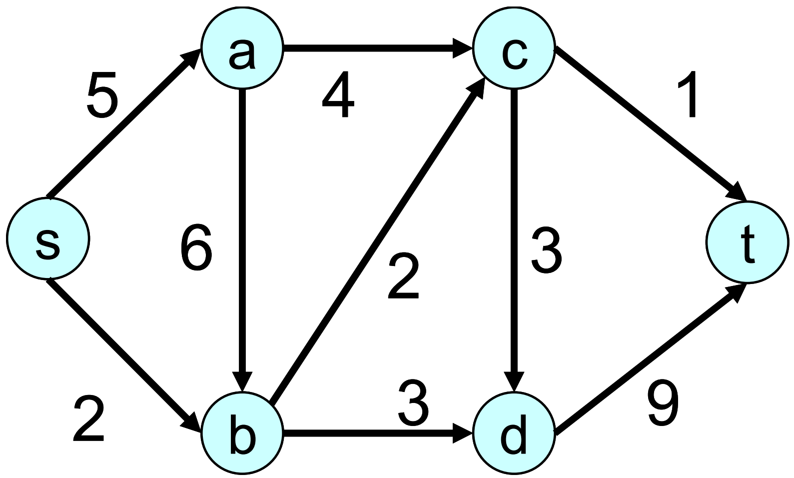



実行可能解の例

# 最大流問題の定式化: 変数, 目的関数と容量条件

変数 $x_{ij}$: フロー＝枝 (i, j) を流れる「もの」の量
変数 f: 総流量　＝ シンクに流れ込む「もの」の総量
　　　　　　　　＝ ソースから流れ出す「もの」の総量

目的:ソースからシンクに「もの」を出来るだけ多く流したい
　　⇒ 最大化 f
容量条件:0 ≦ 各枝を流れる「もの」の量 ≦ 枝の容量
　　⇒ $0 \leqq x_{ij} \leqq u_{ij}$　　$((i,j) \in E)$




最大化　f
容量条件:
$0 \leqq x_{sa} \leqq 5$, $0 \leqq x_{sb} \leqq 2$, $0 \leqq x_{ab} \leqq 6$,
$0 \leqq x_{ac} \leqq 4$, $0 \leqq x_{bc} \leqq 2$,
…

# 最大流問題の定式化：流量保存条件

流量保存条件：

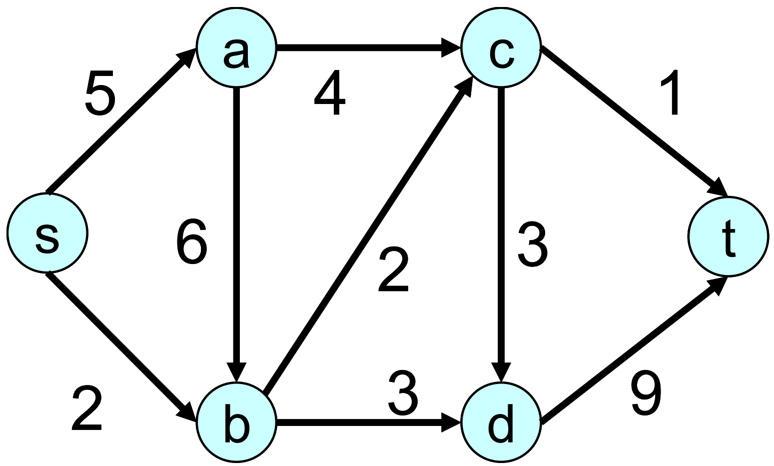
(頂点から流れ出す「もの」の量) − (流れ込む「もの」の量) ＝ 0

⇒ $\sum\{x_{kj}$ | 枝 (k,j) は 頂点 k から出る}
　　− $\sum\{x_{ik}$ | 枝 (i,k) は 頂点 k に入る} ＝ 0　$(k \in V - \{s, t\})$

ソースとシンクに関する条件：

$\sum\{x_{sj}$ | (s,j) は s から出る} - $\sum\{x_{is}$ | (i,s) は s に入る} = f

$\sum\{x_{tj}$ | (t,j) は t から出る} - $\sum\{x_{it}$ | (i,t) は t に入る} = - f




流量保存条件の例：

$x_{ac} + x_{ab} - x_{sa} = 0$

$x_{bc} + x_{bd} - x_{ab} - x_{sb} = 0$

$x_{ct} + x_{cd} - x_{ac} - x_{cb} = 0$

$x_{dt} - x_{cd} - x_{bd} = 0$

$x_{sa} + x_{sb} = f$,　　$- x_{ct} - x_{dt} = - f$

# 最大流問題の定式化：まとめ

最大化　$f$

条件　$0 \leqq x_{ij} \leqq u_{ij}$　　$((i,j) \in E)$

$\sum\{x_{kj} \mid (k,j)$ は $k$ から出る$\} - \sum\{x_{ik} \mid (i,k)$ は $k$ に入る$\} = 0$

(k : s, t 以外の頂点)

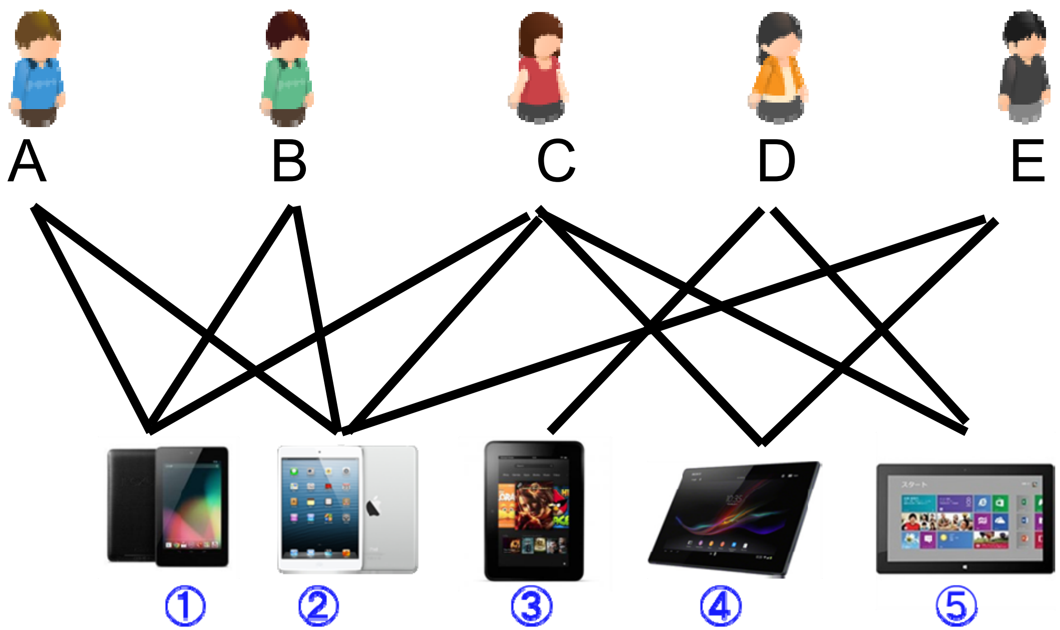
$\sum\{x_{sj} \mid (s,j)$ は $s$ から出る$\} - \sum\{x_{is} \mid (i,s)$ は $s$ に入る$\} = f$

$\sum\{x_{tj} \mid (t,j)$ は $t$ から出る$\} - \sum\{x_{it} \mid (i,t)$ は $t$ に入る$\} = -f$

この問題の実行可能解 $x_{ij}$ --- 実行可能フロー
総流量が最大の実行可能フロー --- 最大フロー

# 最大流問題の応用例：最大マッチング

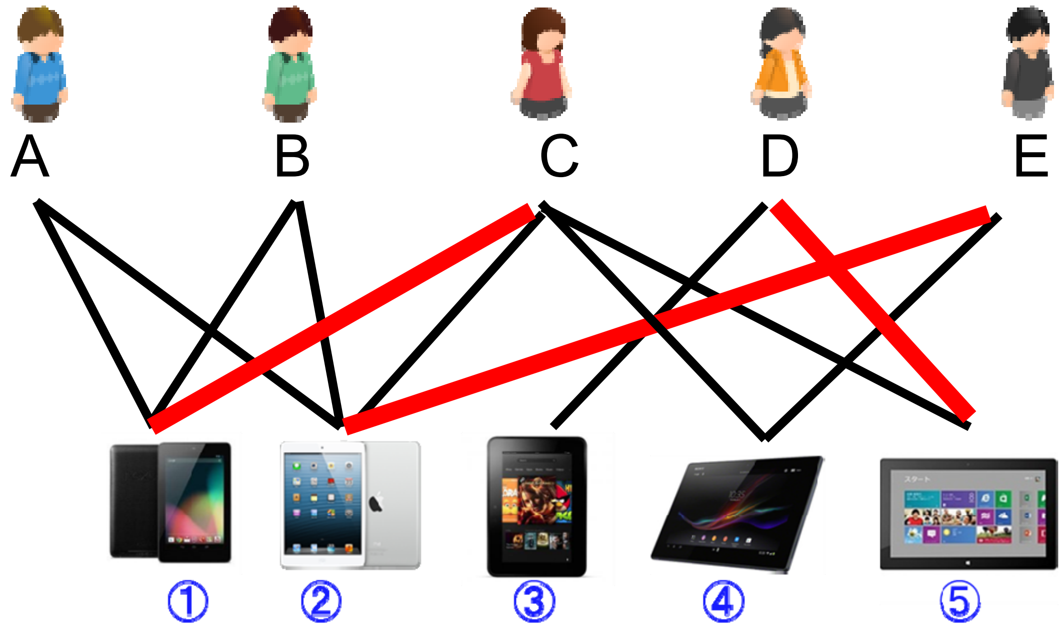
- 品物の割当問題
  - m 個の品物を，n人の希望者に割り当てる
  - 各希望者は欲しい品物リストを提示，その中の高々一つを割り当てる
  - できるだけ多くの希望者に，商品を割り当てたい




これもグラフの問題
（2部グラフ---頂点が
 2種類に分かれている）

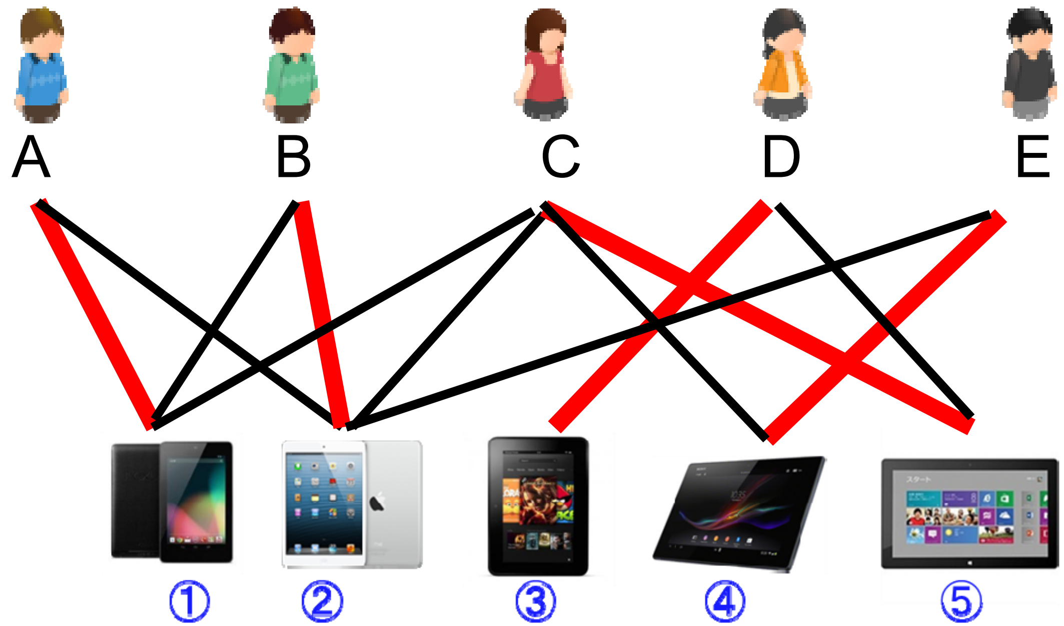
割当方法＝マッチング

# マッチングの例




下手な割当

3人しか
品物をもらえない

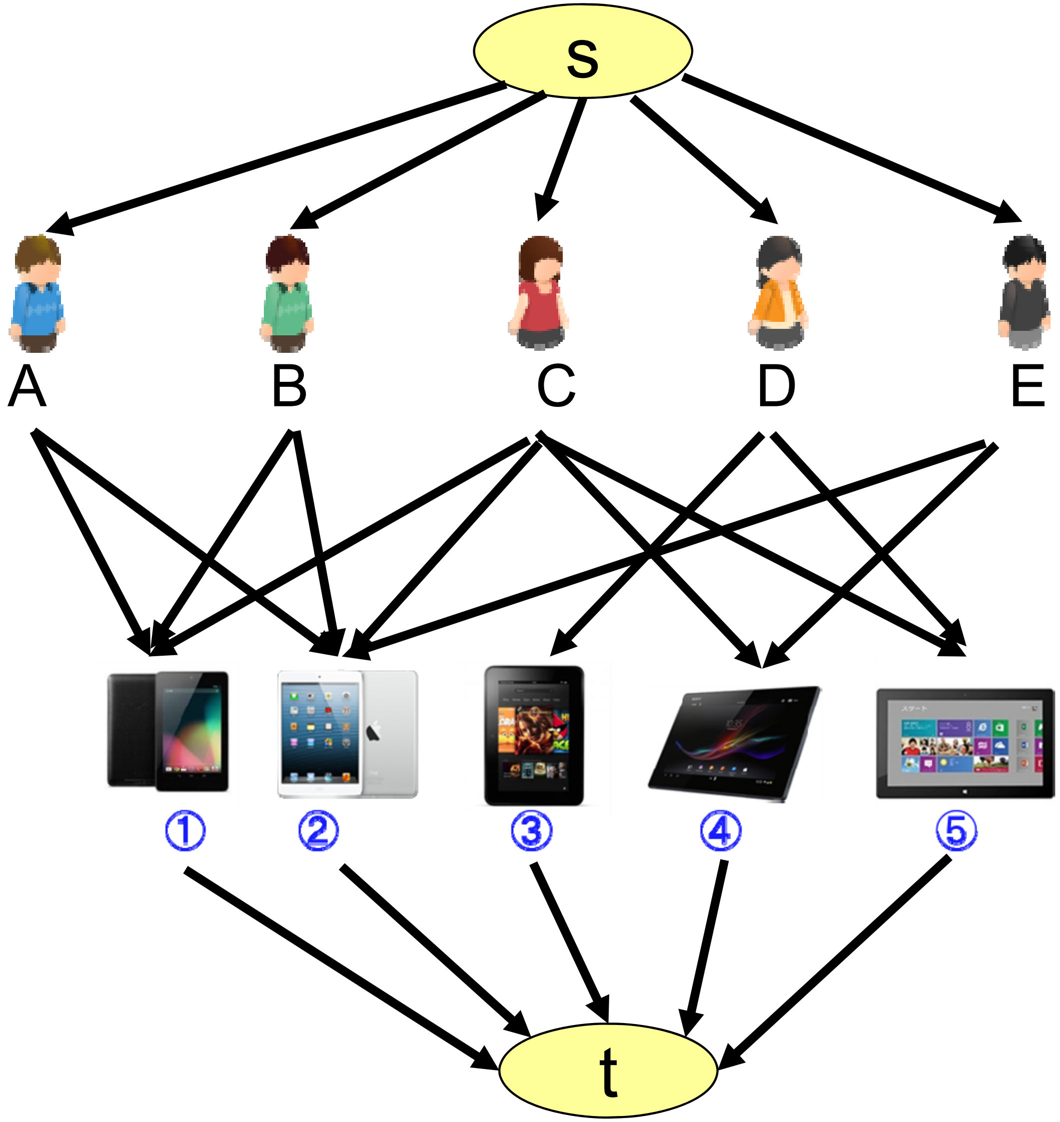



上手な割当

5人全員
品物をもらえる

# 最大マッチングから最大流へ

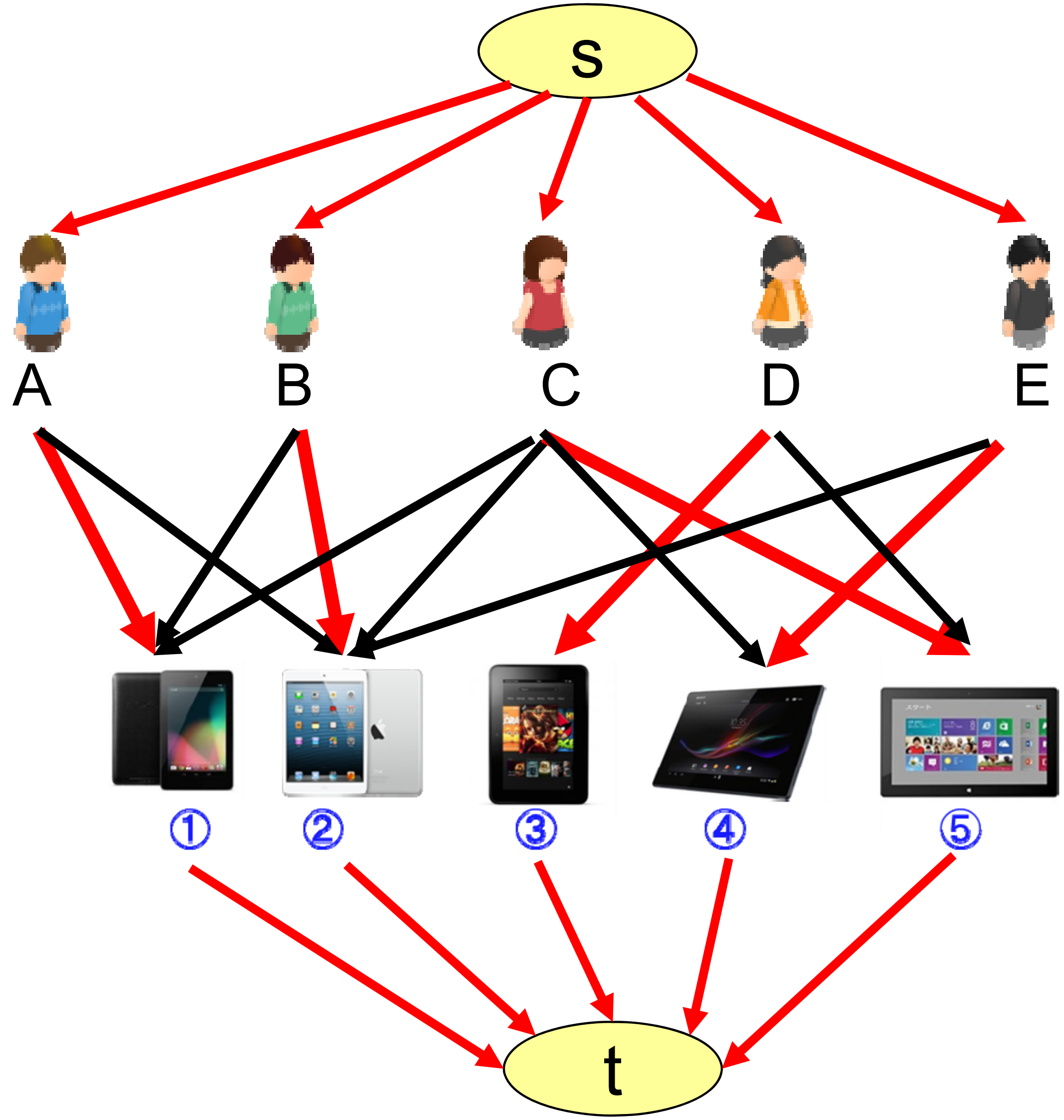
- 最大マッチング問題は最大流問題へ変換(帰着)可能




- 元のグラフの枝に向きを付ける(上から下へ)
- ソースとシンクをおく
- ソースから上側頂点全てへの枝をおく
- 下側頂点全てからシンクへの枝をおく
- 全ての枝容量＝1

# 最大マッチングから最大流へ

- 最大マッチング問題は最大流問題へ変換（帰着）可能




- 元のグラフの枝に向きを付ける（上から下へ）
- ソースとシンクをおく
- ソースから上側頂点全てへの枝をおく
- 下側頂点全てからシンクへの枝をおく
- 全ての枝容量＝１

➔各希望者は高々１つの品物を得る
各品物は高々１人の希望者に割り当て

# 最大流問題のその他の応用例

- 物流
- シーズン途中でのプロ野球チームの優勝可能性判定
  - 残り試合全勝しても優勝の可能性がないかどうか？
- 画像処理における物体の切り出し
  - 画像内の物体のみ取り出す
- その他多数

# 最大流問題の解法

最大流問題は線形計画問題の特殊ケース

⇒　単体法で解くことが可能

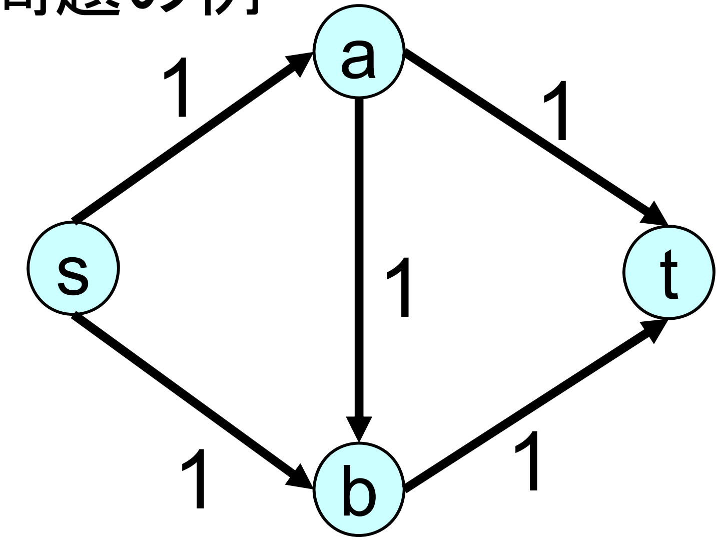
最大流問題は良い（数学的な）構造をもつ

⇒　この問題専用の解法（増加路アルゴリズムなど）

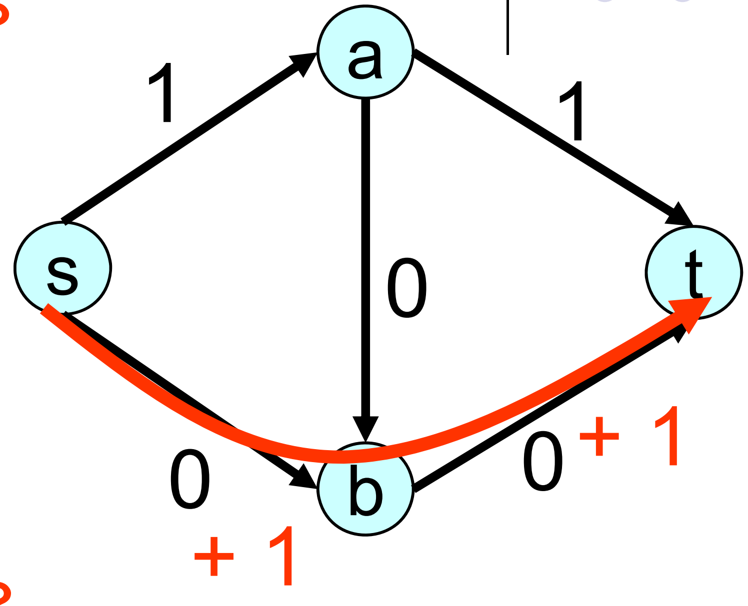
を使うと，より簡単＆より高速に解くことが可能

# 最大フローの判定

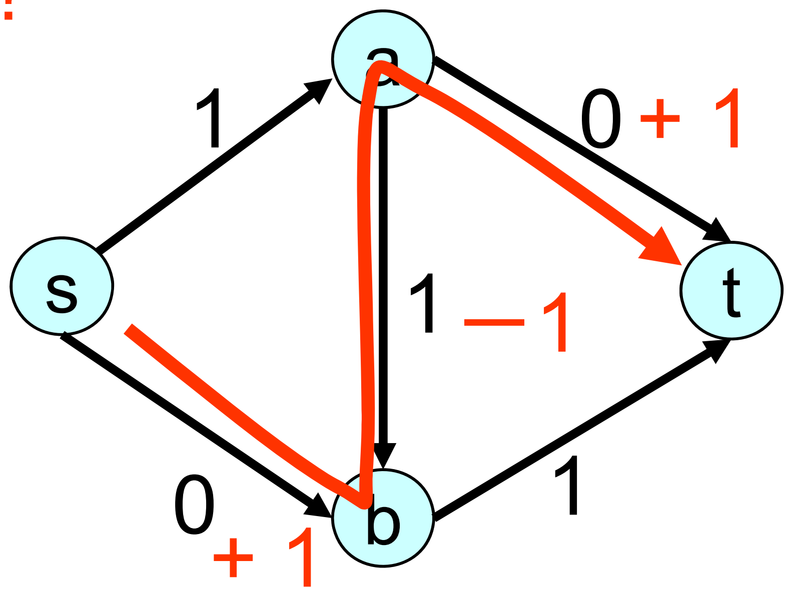
問題の例




フロー例1：最大？
最大ではない




フロー例2：最大？
最大ではない



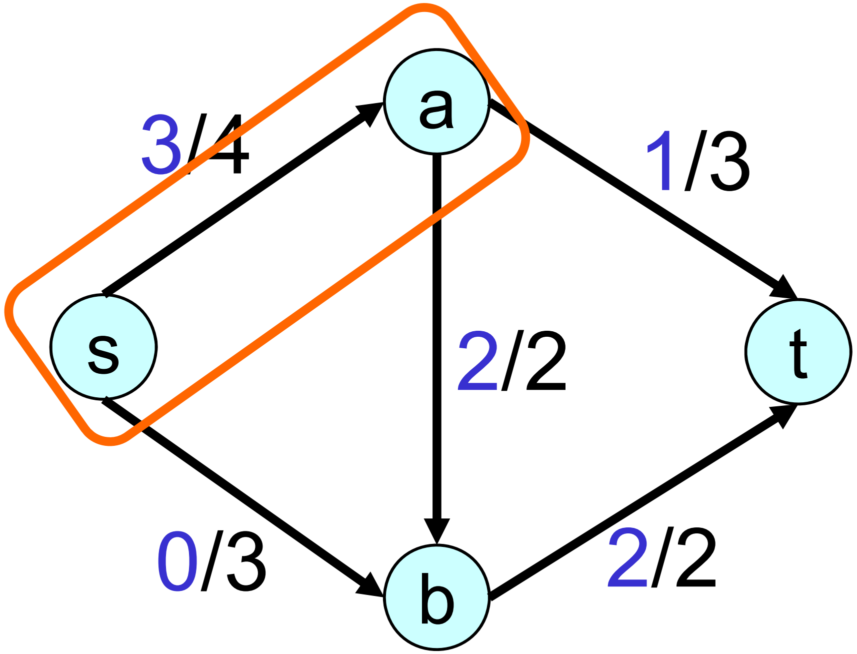

最大フローであることの判定を

効率よく行うには？

⇒ 残余ネットワークを利用

# 残余ネットワークの定義

残余ネットワークの作り方

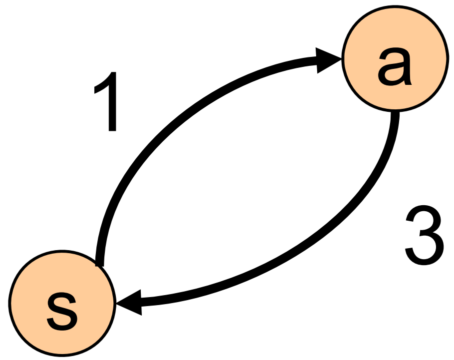



問題例とフロー

各枝のデータは

（フロー量/容量）

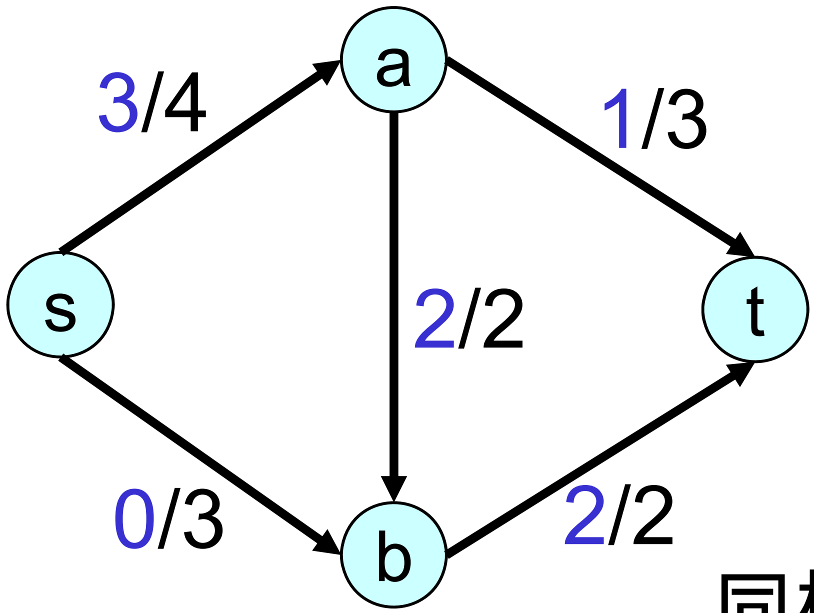
枝(s,a)において
☆さらに4－3＝1だけフロー
を流せる
⇒　残余ネットワークに
容量1の枝(s,a)を加える




☆現在のフロー3を逆流させて
0にすることが出来る
⇒　容量3の枝(a,s)を加える

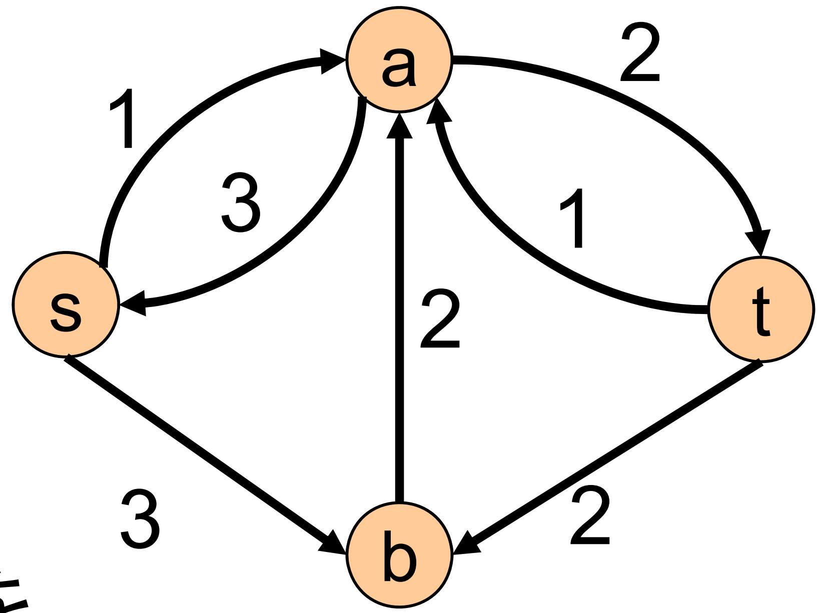
# 残余ネットワークの定義

残余ネットワークの作り方




問題例とフロー

同様の操作を
各枝に行う




残余ネットワーク
の完成

# 残余ネットワークの定義(まとめ)

$x = (x_{ij} \mid (i,j) \in E)$: 現在のフロー

フロー x に関する残余ネットワーク $G^x = (V, E^x)$

$E^x = F^x \cup R^x$

**順向き**の枝集合

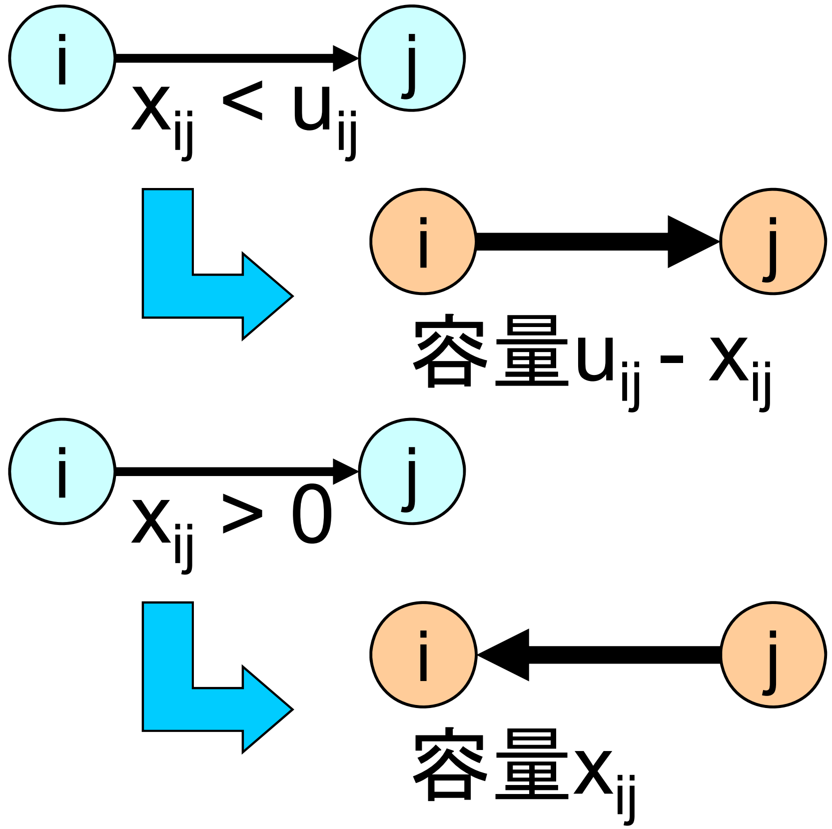
$F^x = \{ (i, j) \mid (i, j) \in E, x_{ij} < u_{ij} \}$

各枝の容量 $u^x_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$

**逆向き**の枝集合

$R^x = \{ (j, i) \mid (i, j) \in E, x_{ij} > 0 \}$

各枝の容量 $u^x_{ji} = x_{ij}$




**注意!** : 現在のフローが変わると残余ネットワークも変わる

# 残余ネットワークに関する定理

増加路 : 残余ネットワークでの
ソース s からシンク t へのパス(路・みち)

**定理１** : 残余ネットワークに 増加路が存在する
➔ 現在のフローの総流量は増加可能

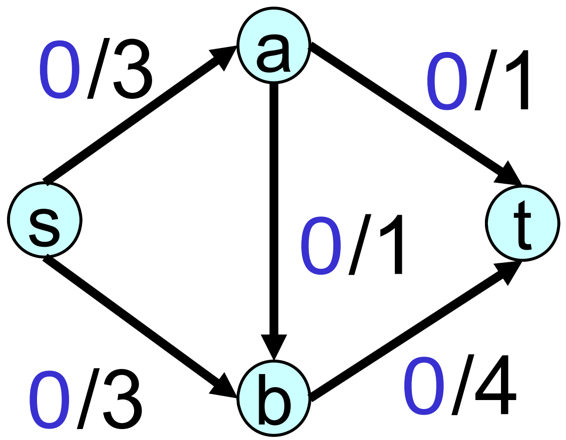
**定理２** : 残余ネットワークに 増加路が存在しない
➔ 現在のフローは最大フロー

# 定理1の例

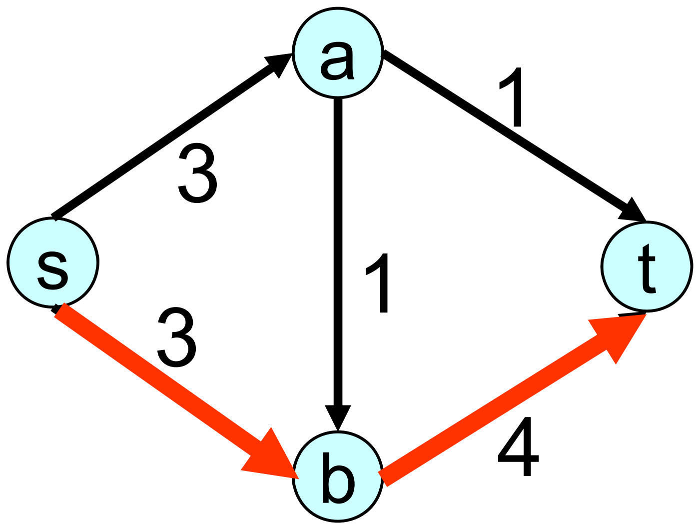
**定理１**：残余ネットワークに増加路が存在する
➔ 現在のフローの総流量は増加可能

証明：増加路（s-tパス）を使うと，本当に総流量を増加できる

現在のフローx

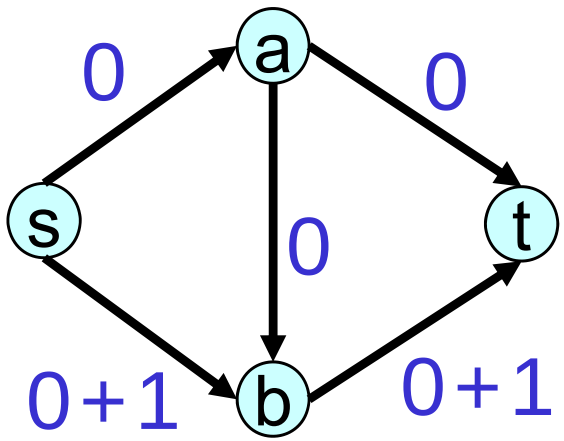



残余ネットワーク




増加路が存在

新しいフローx’



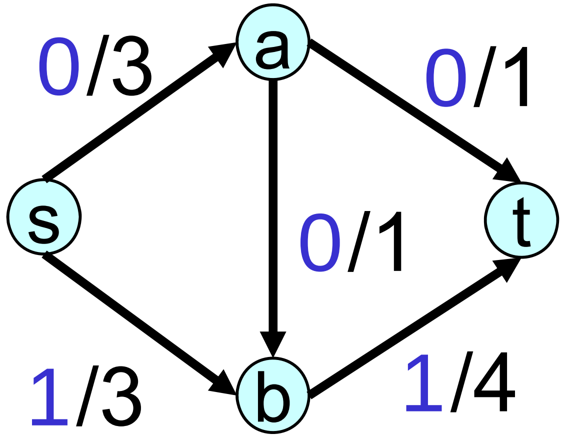

総流量が
１増えた

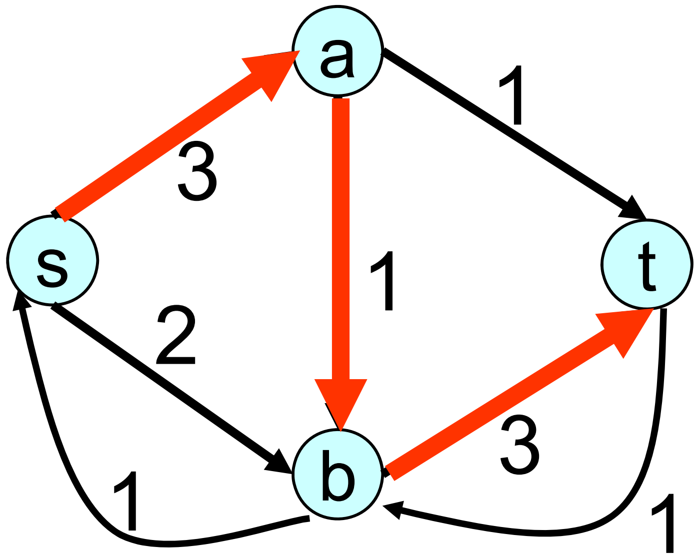
# 定理1の例

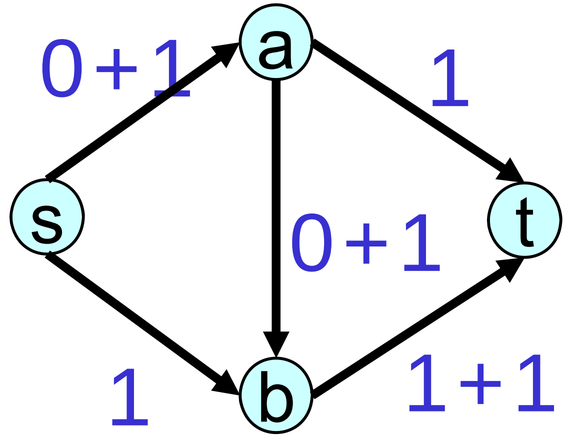
現在のフローx

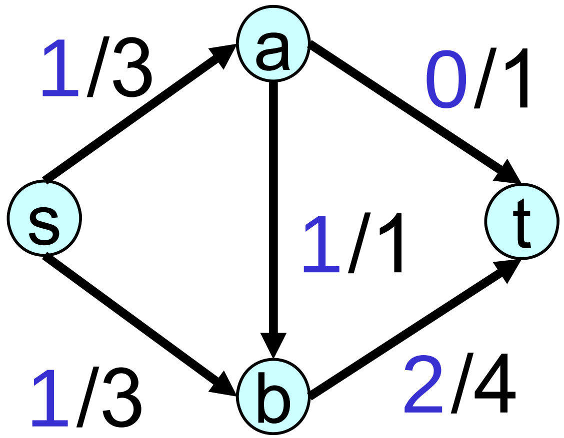
残余ネットワーク

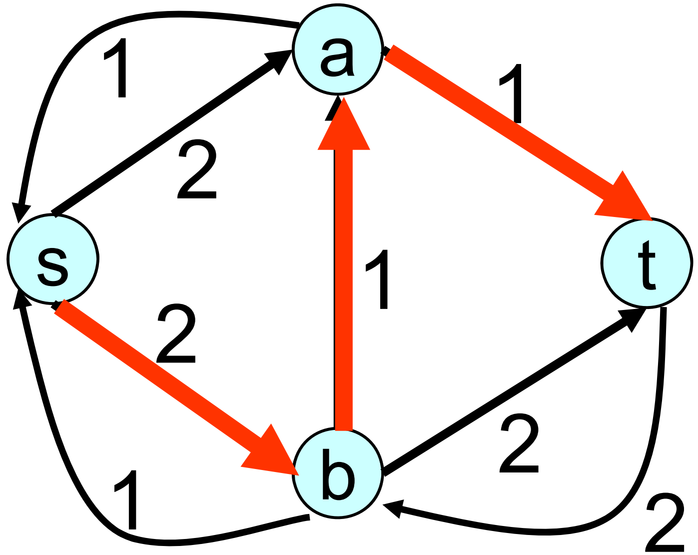
新しいフローx'

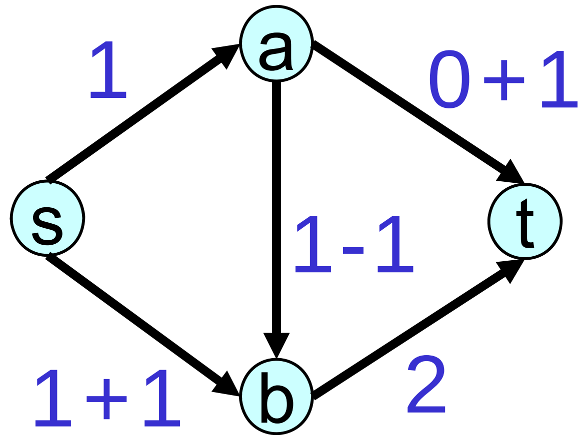


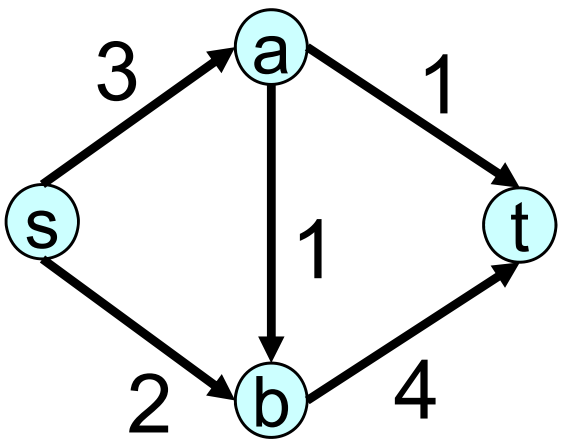



# 定理2の例

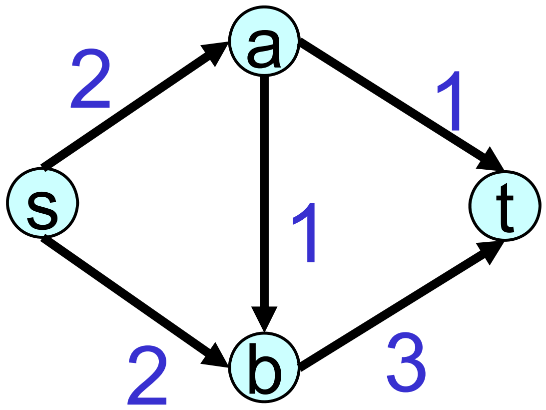
定理2：残余ネットワークに s-t パスが存在しない
➔ 現在のフローは最大フロー

証明は次回

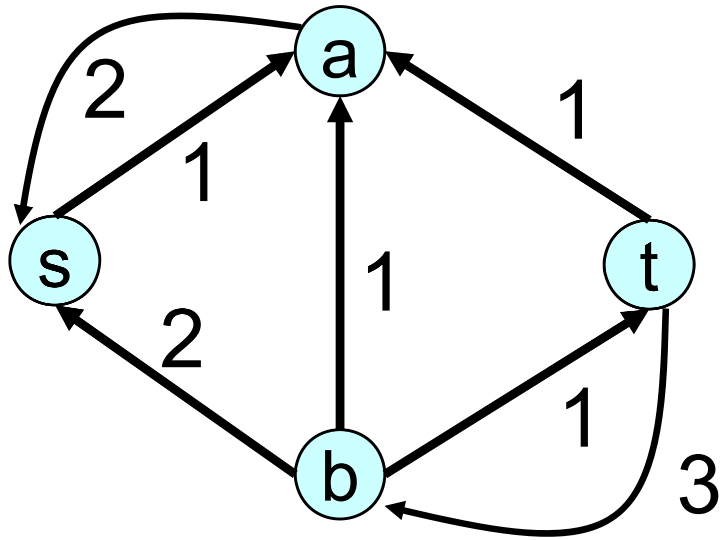
与えられた問題




現在のフロー




残余ネットワーク




s-t パスがない
➔現在のフローは最適！

# 増加路アルゴリズム

最大フローを求めるアルゴリズム

ステップ0：初期の実行可能フローとして，
全ての枝のフロー量を0とする

ステップ1：現在のフローに関する残余ネットワークを作る

ステップ2：残余ネットワークに 増加路が存在しない　⇒　終了

ステップ3：残余ネットワークの増加路をひとつ求め，
それを用いて現在のフローを更新する

ステップ4：ステップ1へ戻る

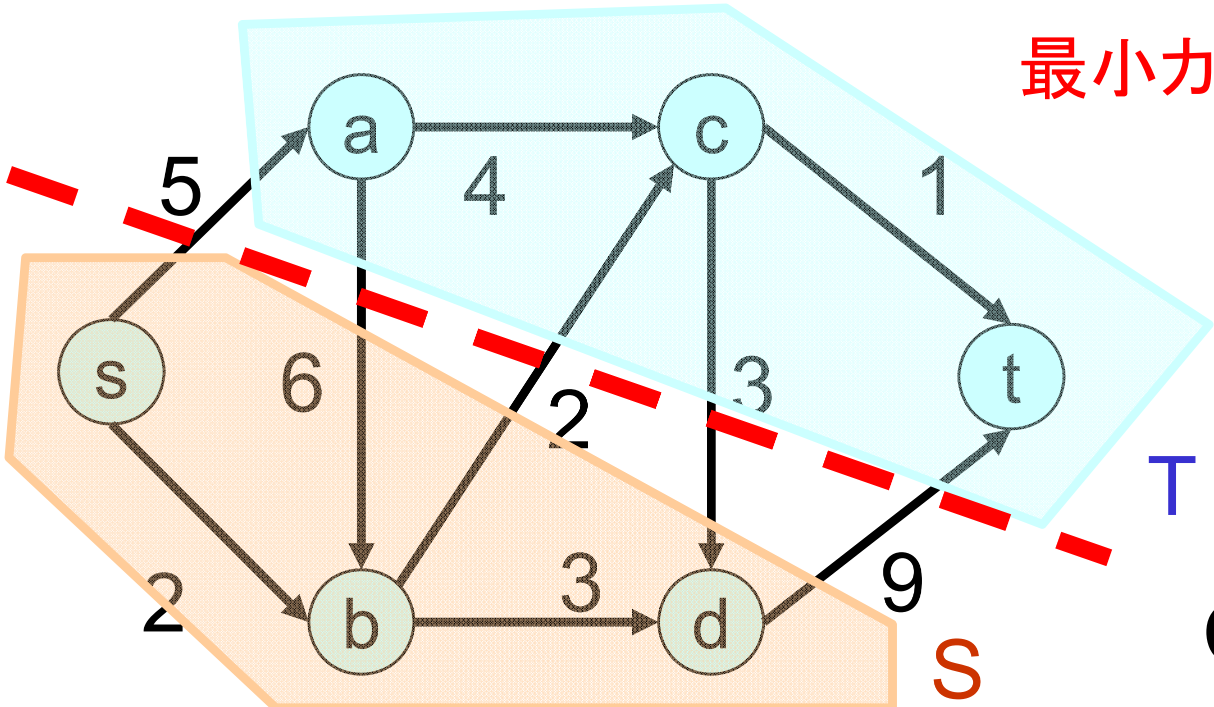
# カット

フローを流すとき，ネットワークのボトルネックはどこ？

カット (S, T): S, T は頂点集合Vの分割（$S \cap T = \emptyset, S \cup T = V$）
S はソース s を含む，Tはシンク t を含む

カット (S, T) の容量C(S,T) ＝ SからTへ向かう枝の容量の和

最小カット：容量が最小のカット




C(S,T)=5+2+9=16

# カットの性質(その1)

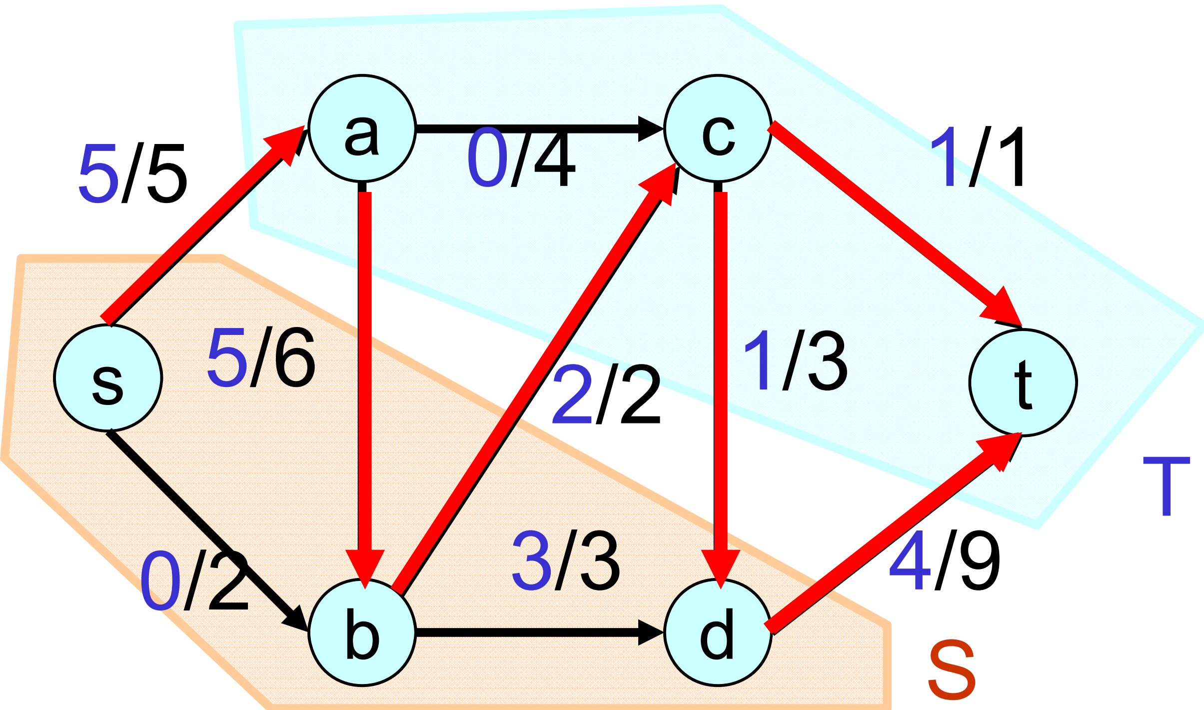
**性質1：**

任意のカット(S, T) と任意の実行可能フロー $(x_{ij} \mid (i,j) \in E)$ に対し

SからTへの枝のフローの和 x(S,T)

ー TからSへの枝のフローの和 x(T,S)

＝ フローの総流量 f




f = 1 + 4 = 5

x(S, T) = 5 + 2 + 4 = 11

x(T, S) = 5 + 1 = 6

f = 11 – 6 = 5

# カットの性質(その1)

下記のネットワークの場合の証明:

頂点 s, b, d ∈Sに関する流量保存条件を足し合わせる

$$(x_{bc} + x_{bd}) - (x_{sb} + x_{ab}) = 0$$
$$x_{dt} - (x_{cd} + x_{bd}) = 0$$
$$x_{sa} + x_{sb} = f$$

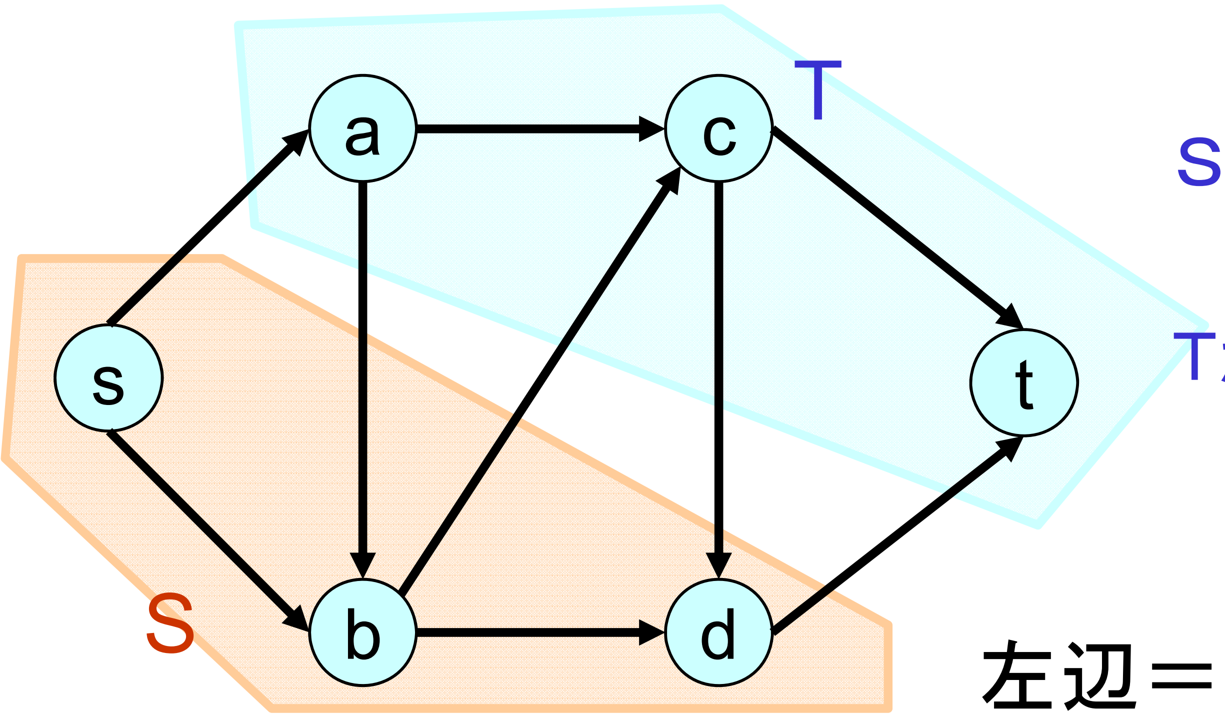
左辺の和をとる

SからTへの枝 の変数 $x_{ij}$ は
係数が＋1

TからSへの枝 の変数 $x_{ij}$ は
係数が－1

SからSへの枝 の変数 $x_{ij}$ は
打ち消される

TからTへの枝 の変数 $x_{ij}$ は
登場しない




左辺＝$(x_{sa}+x_{bc}+x_{dt}) - (x_{ab}+x_{cd})$

# カットの性質(その1)

一般の場合の証明: 下記の制約式を足し合わせる

$$\sum\{x_{kj} \mid (k,j) \text{ は } k \text{ から出る}\} - \sum\{x_{ik} \mid (i,k) \text{ は } k \text{ に入る}\} = 0 \qquad (k \in S - \{s\})$$

$$\sum\{x_{sj} \mid (s,j) \text{ は } s \text{ から出る}\} - \sum\{x_{is} \mid (i,s) \text{ は } s \text{ に入る}\} = f$$

左辺の和をとる

SからTへの枝 の変数 $x_{ij}$ は係数が＋1

TからSへの枝 の変数 $x_{ij}$ は係数が－1

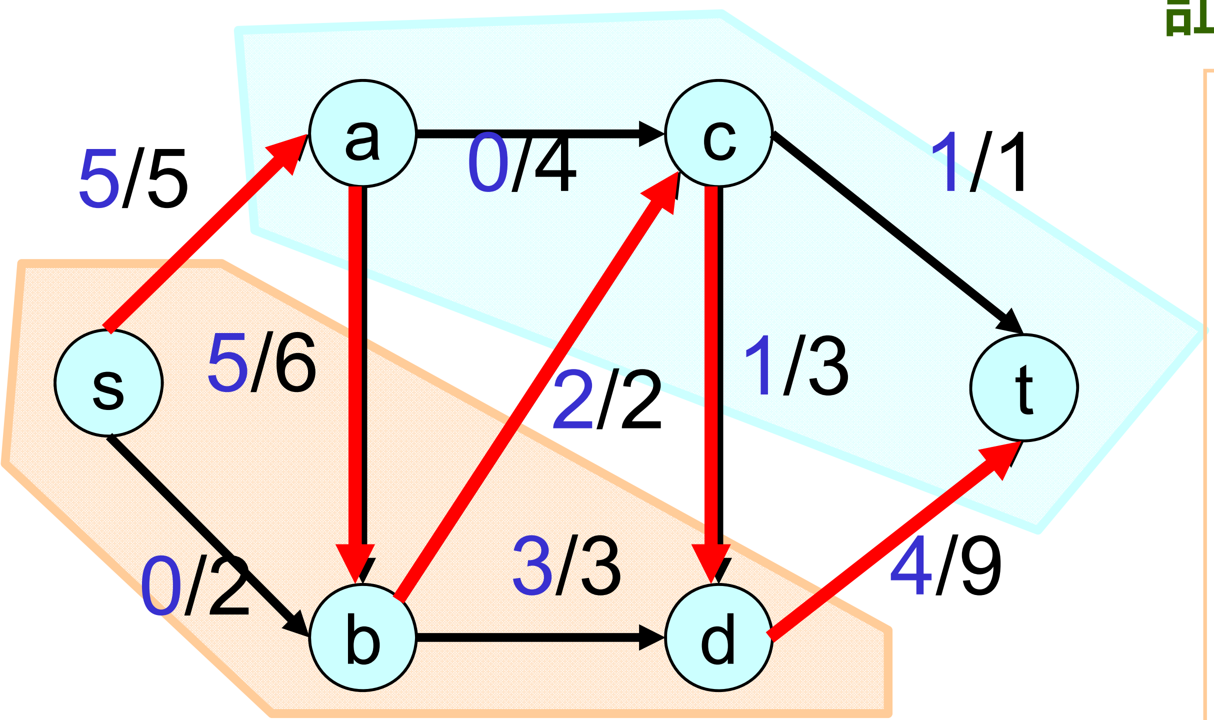
SからSへの枝 の変数 $x_{ij}$ は打ち消される

TからTへの枝 の変数 $x_{ij}$ は登場しない

⇒ 左辺＝ $x(S, T) - x(T, S)$

# カットの性質(その2)

**性質2**：任意のカット(S, T) とフロー $(x_{ij} \mid (i,j) \in E)$ に対し
フローの総流量 f ≦ カットの容量 C(S,T)




f = 5 ≦ 16 = C(S, T)

証明:

f = x(S, T) – x(T,S)
（性質1）
x(S, T) ≦ C(S, T)
（容量条件）
x(T, S) ≧ 0
（フローは非負）
∴ f ≦ C(S, T) – 0
= C(S, T)

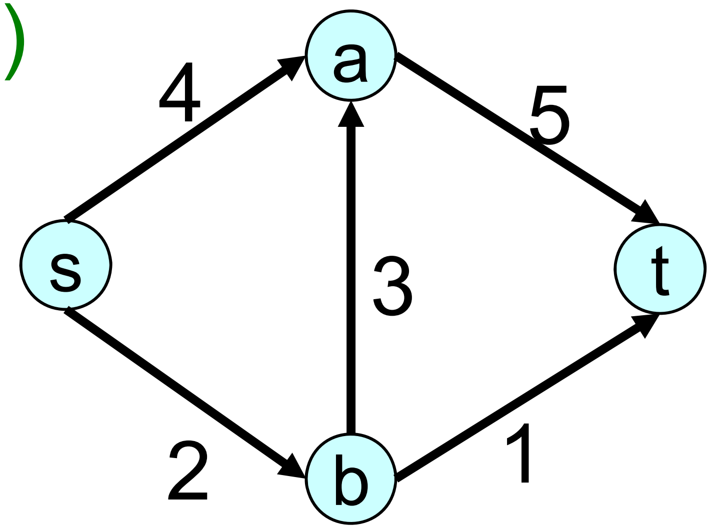
# 演習問題

問1：次の2つの最大流問題に対する定式化を書きなさい

問2：次の2つの最大流問題に対して，増加路アルゴリズムで最大流を求めよ

問3：2つのグラフの最小カット（と思われるカット）を求めよ（頑張って探してみてください）

(a)




(b)