最適化基礎
第１１回

最小費用流問題
最大重みマッチングとオークション

塩浦昭義
東京工業大学 社会工学専攻 准教授
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp
http://www.soc.titech.ac.jp/~shioura/teaching

最小費用流問題

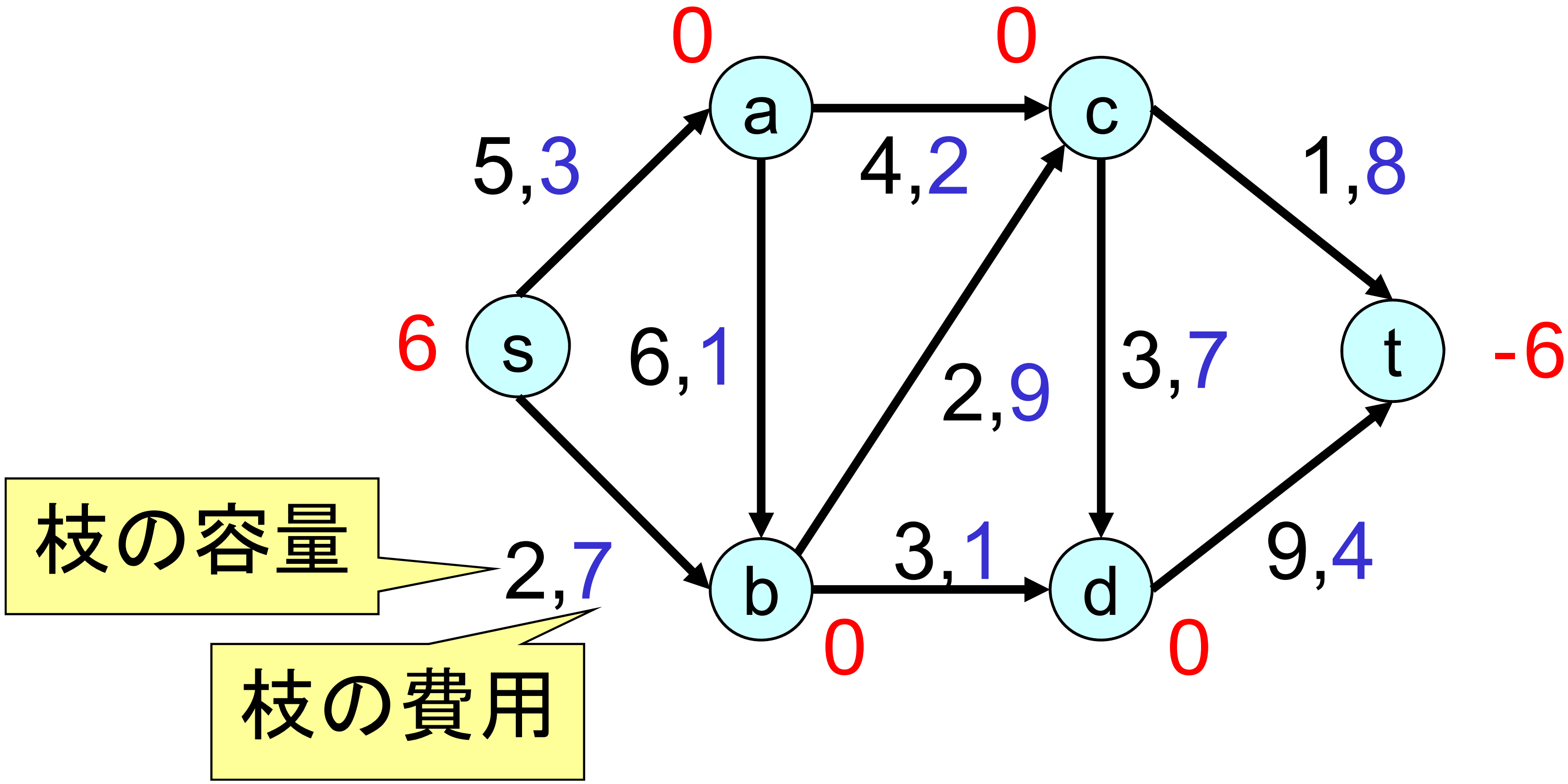
入力：有向グラフ G = (V, E)

各頂点 $i \in V$ の供給・需要量 b_i（ただし b_i の和は0）

($b_i > 0 \Rightarrow$ i は供給点，$< 0 \Rightarrow$ i は需要点，$= 0 \Rightarrow$ i は通過点)

各枝 $(i, j) \in E$ の容量 $u_{ij} \geqq 0$，費用 c_{ij}

出力：需要供給を満たすフローで総費用が最小のもの



最小費用フロー問題：定式化

目的: 最小化 $\sum_{(i,j)\in E} c_{ij} x_{ij}$

（各枝の費用×フロー量）の和

条件 $0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad ((i,j) \in E)$

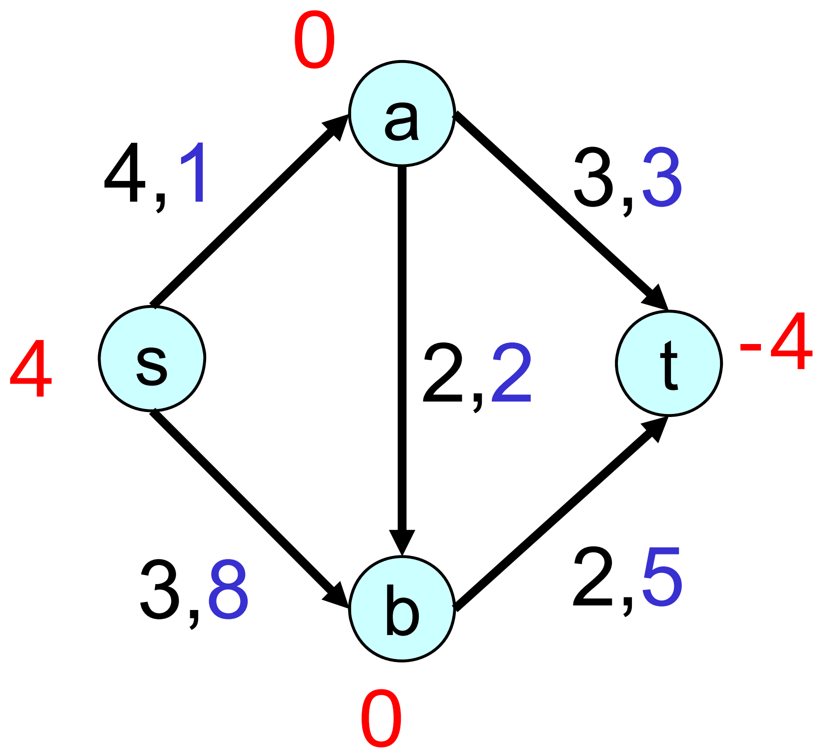
各枝の容量条件

$$\sum\{x_{kj} \mid (k,j) \text{ は } k \text{ から出る枝}\} - \sum\{x_{ik} \mid (i,k) \text{ は } k \text{ に入る枝}\} = b_k \quad (k \in V)$$

各頂点での
流量保存条件
（需要供給量に
関する条件）

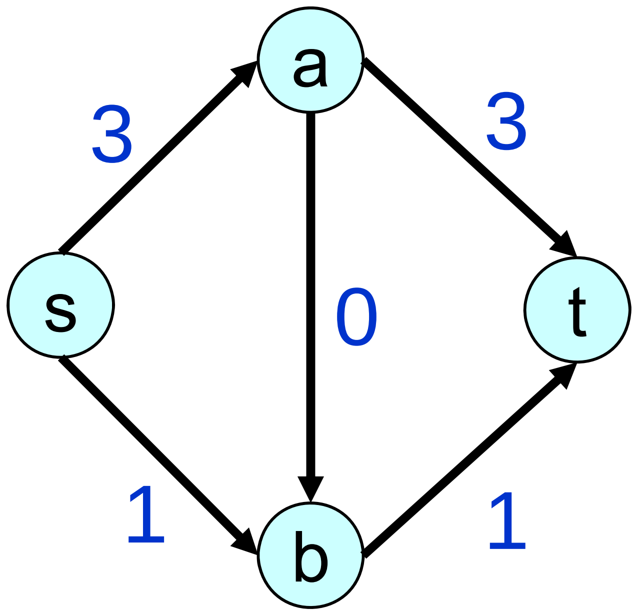
これも線形計画問題

フローの最適性判定



問題例

フローの例



フローの費用＝25
最小か？

どうやって最小費用フローであることを判定するか？

ーーー　残余ネットワークの利用

残余ネットワークの作り方(その1)

最大流のときとほとんど同じ作り方

$x = (x_{ij} \mid (i,j) \in E)$: 現在のフロー

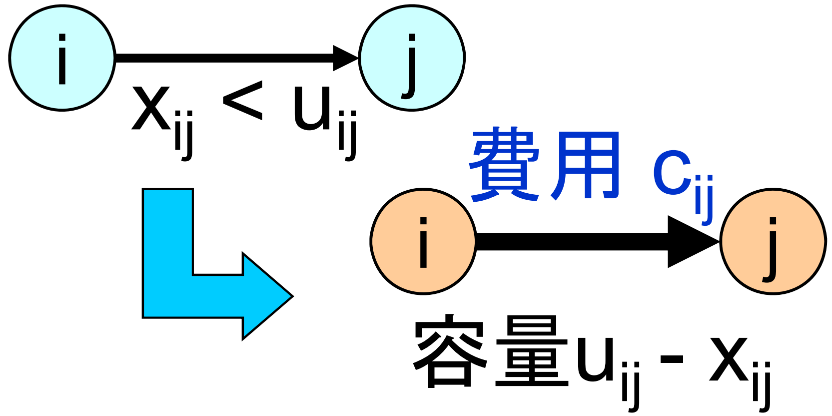
フロー x に関する残余ネットワーク $G^x = (V, E^x)$

$E^x = F^x \cup R^x$

順向きの枝集合

$F^x = \{ (i, j) \mid (i, j) \in E,\ x_{ij} < u_{ij} \}$

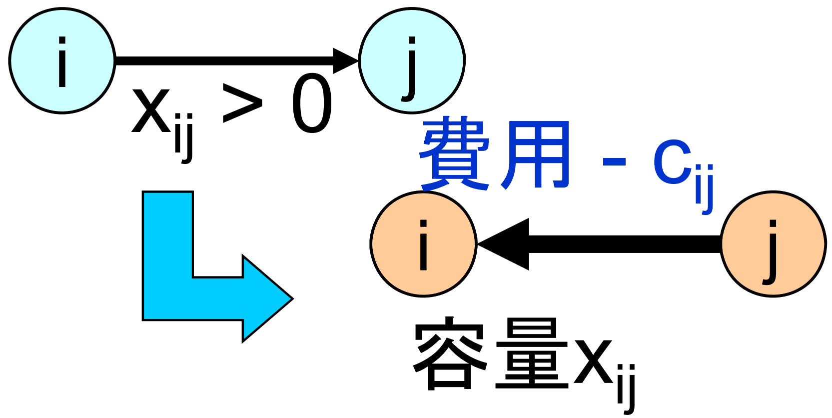
容量 $u^x_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$, 費用 c_{ij}



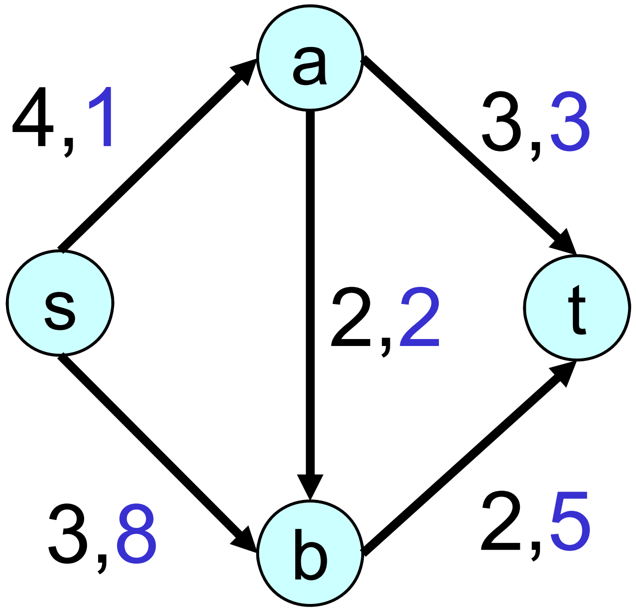
逆向きの枝集合

$R^x = \{ (j, i) \mid (i, j) \in E,\ x_{ij} > 0 \}$

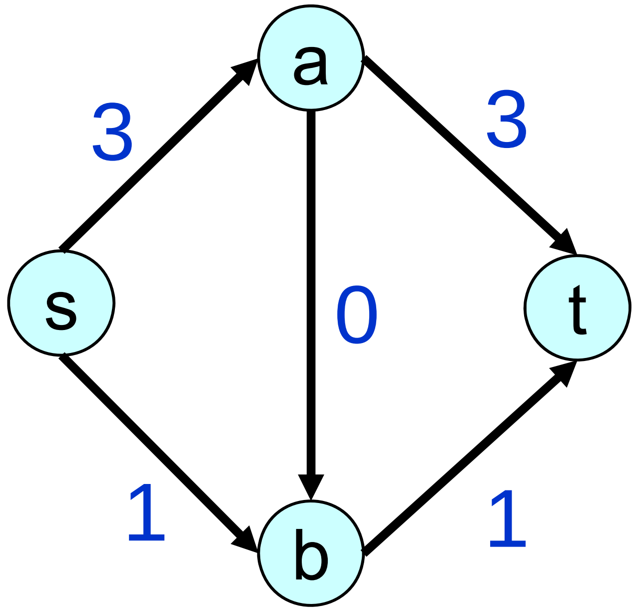
容量 $u^x_{ji} = x_{ij}$, 費用 $- c_{ij}$



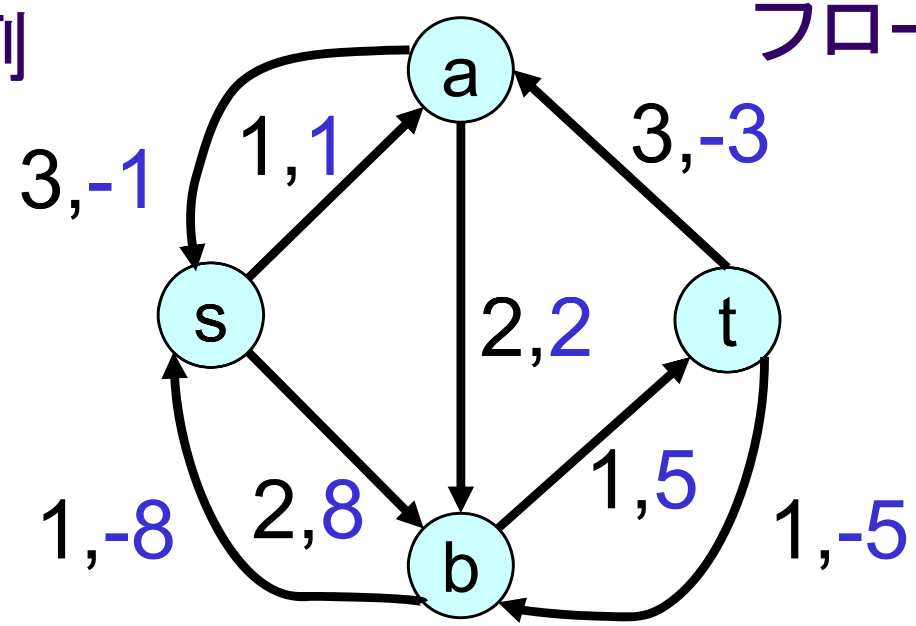
残余ネットワークの作り方（その2）



問題例



フローの例



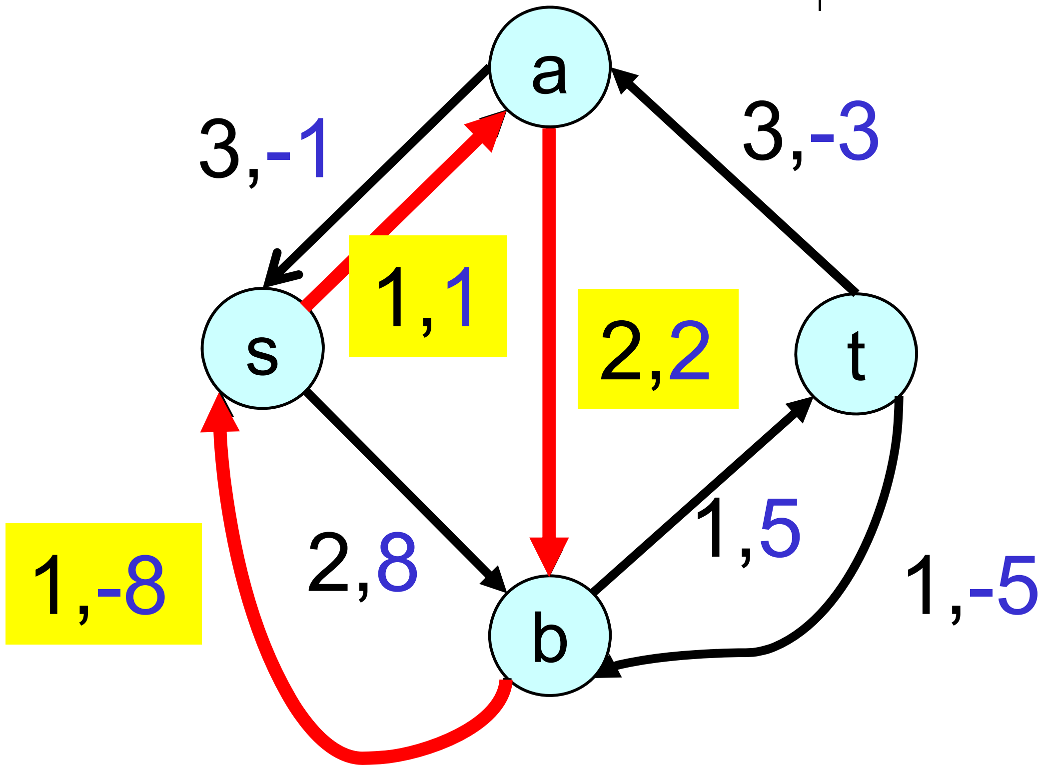
残余ネットワーク

残余ネットワークの性質(1)

残余ネットワークの閉路に注目

閉路の容量 α
＝閉路に含まれる枝の
容量の最小値 = 1

閉路の費用 γ
＝閉路に含まれる枝の
費用の和 = -5

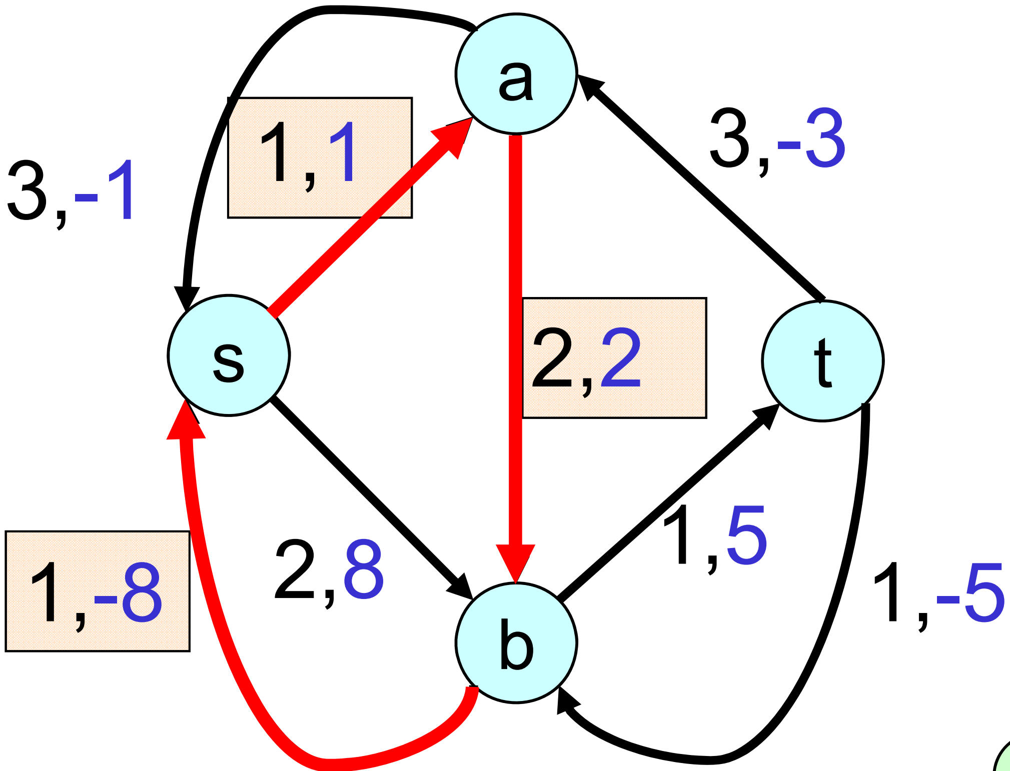


定理１：残余ネットワークに費用が負の閉路が存在
⇒ フローの費用を減少させることが可能
⇒ 現在のフローは費用最小でない

定理1の証明の概略

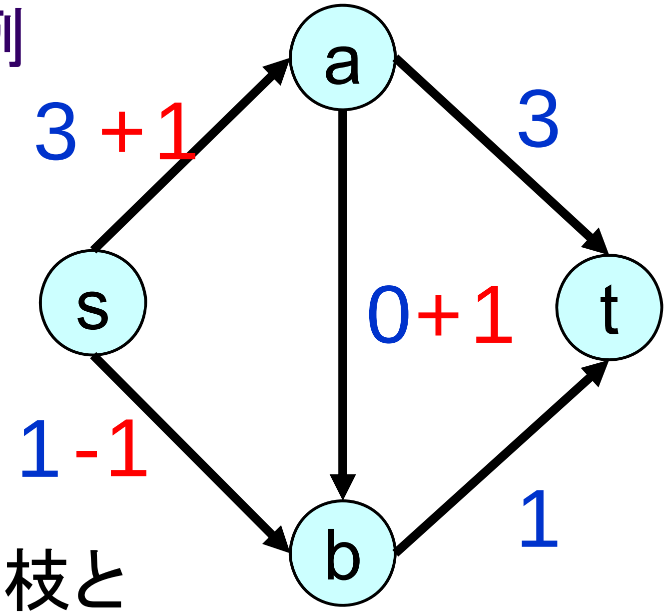
費用が負の閉路を用いて，フローの費用を減少できる

残余ネットワーク



閉路の容量 α=1
閉路の費用 γ=−5

フローの例



閉路の枝と
同じ向き⇒フロー値に＋ α
逆の向き⇒フロー値に－ α
無関係⇒フロー値は不変

この更新により、フローの費用は
$\alpha\gamma$（＝－5）変化
（より費用の小さいフローを得る）

残余ネットワークの性質(その3)

以上の議論より、以下が成り立つ

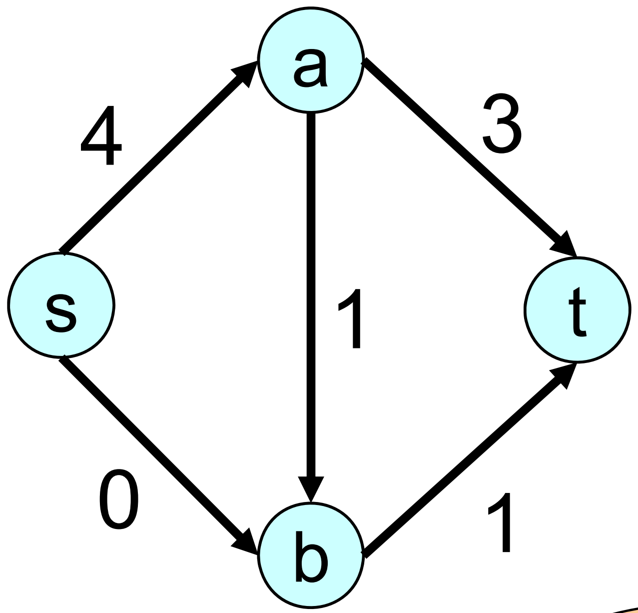
定理１：残余ネットワークに費用が負の閉路が存在
⇒ フローの費用を減少させることが可能
⇒ 現在のフローは費用最小でない

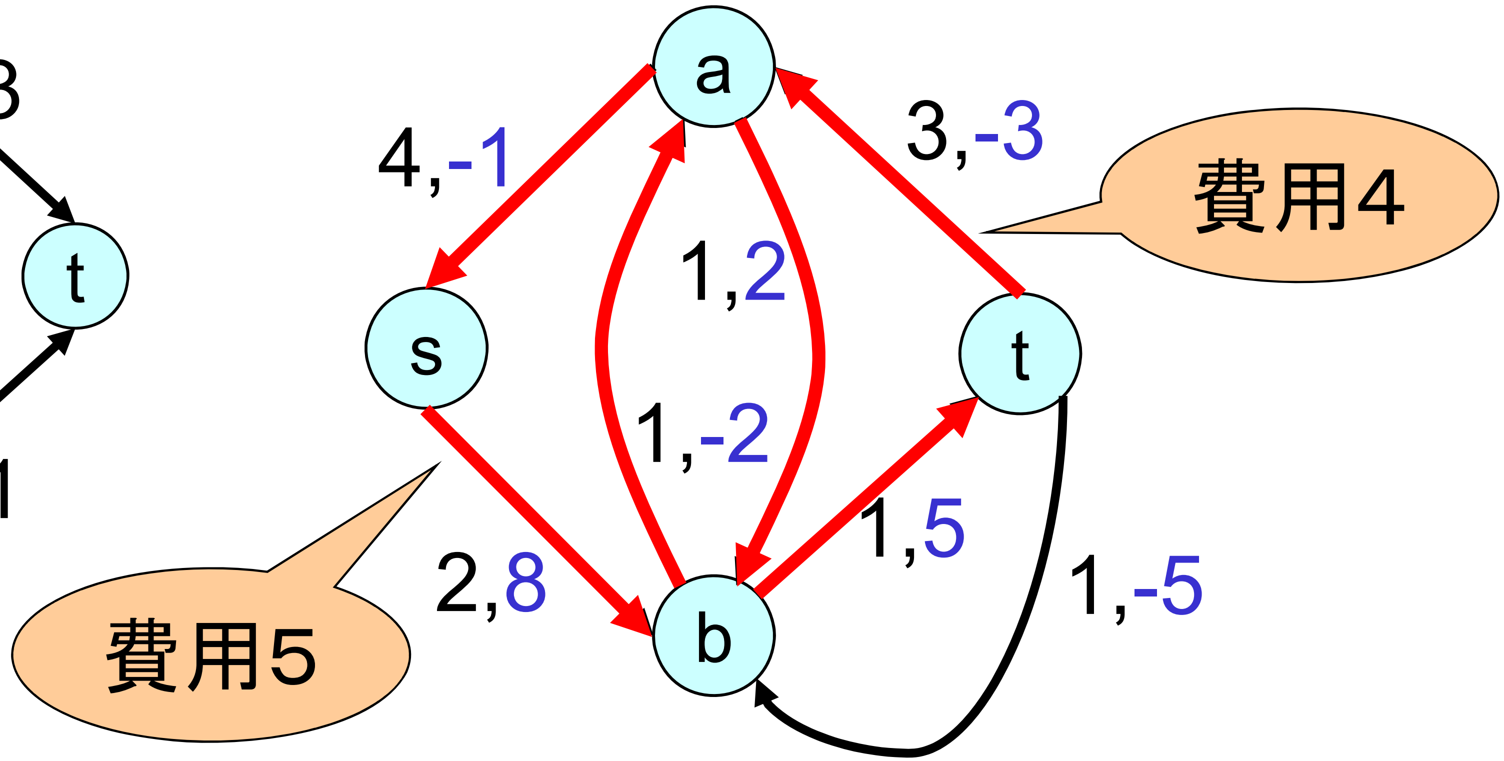
実は、逆も成り立つ(証明は省略)

定理２：現在のフローは費用最小でない
⇒ 残余ネットワークに費用が負の閉路が存在

残余ネットワークの性質(その4)

修正後のフロー　　　　　残余ネットワーク





費用が負の閉路がない
⇒　現在のフローは費用最小

負閉路消去アルゴリズム

最小費用フローを求めるためのアルゴリズム

ステップ0：人工問題を解いて，需要供給量を満たすフローを求める

ステップ1：現在のフローに関する残余ネットワークを作る

ステップ2：残余ネットワークに費用が負の閉路が存在しない

⇒ 現在のフローは費用最小（終了）

ステップ3：残余ネットワークの費用が負の閉路を求め、

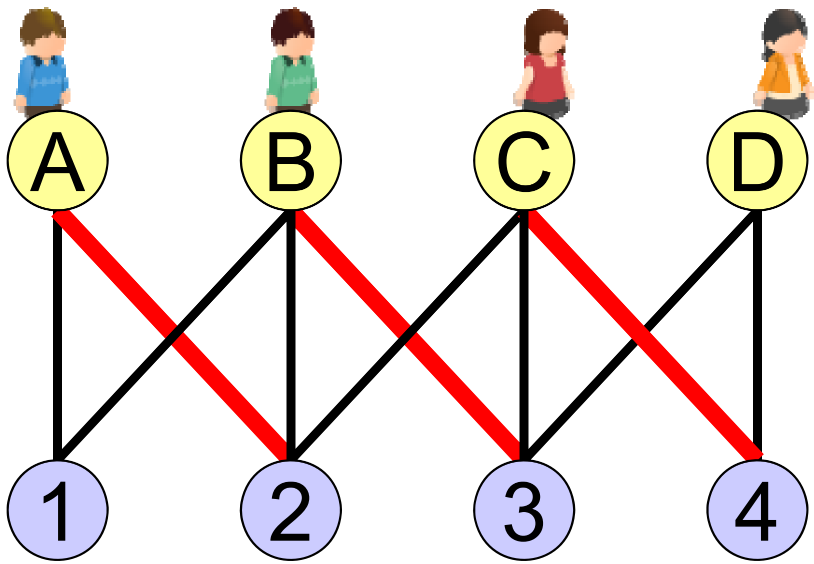
それを用いて現在のフローを更新する

ステップ4：ステップ1へ戻る

最大重みマッチング問題と複数財オークションの接点

最大重みマッチング(復習)

- m 個の品物を，n人に割り当てる
  - 全ての品物を割り当てる必要なし，全員に割り当てる必要なし
- 各希望者 i は，欲しい品物 j とその満足度w(i,j)のリストを提示
  ➔その中の高々一つを割り当てる
- 満足度の合計が最大になるように，商品を割り当てたい



w(i,j)	A	B	C	D
①	2	2		
②	9	4	6	
③		8	7	5
④			9	5

U=希望者全て, V=品物全て, E=グラフの枝全て

複数財オークション

- m 個の財（品物）を同時にオークションにかける
  - 財をすべて売る必要なし，全員が買う必要なし
- 各参加者 i は，欲しい財 j とその評価価格 w(i,j) のリストを提示
- オークション主催者は，各財の「適切な」価格p(j)を求める
- この価格の下で，
  各参加者 i は利得 w(i,j)-p(j) 最大の財 j をひとつ購入

「適切な」価格とは？→ 均衡価格

オークションの目的：均衡価格を求める

均衡価格

定義: 価格 $p(j)$ $(j \in V)$ は均衡価格

⇔次の条件を満たすマッチング $M \subseteq E$ が存在

- 各財 $j \in V$ に対し,
  - j がマッチングに含まれない→ $p(j) = 0$（価値ゼロ）

- 各参加者 i に対し,
  - 最大利得 $\max_{j \in V}\{w(i,j) - p(j)\} > 0$

    →$\exists j_i \in V: (i, j_i) \in M,\ w(i, j_i) - p(j_i) =$ 最大利得
  - 最大利得$= 0$, $\exists j_i \in V: (i, j_i) \in M$

    → $w(i, j_i) - p(j_i) =$ 最大利得
  - 最大利得 < 0 → i はマッチングに含まれない

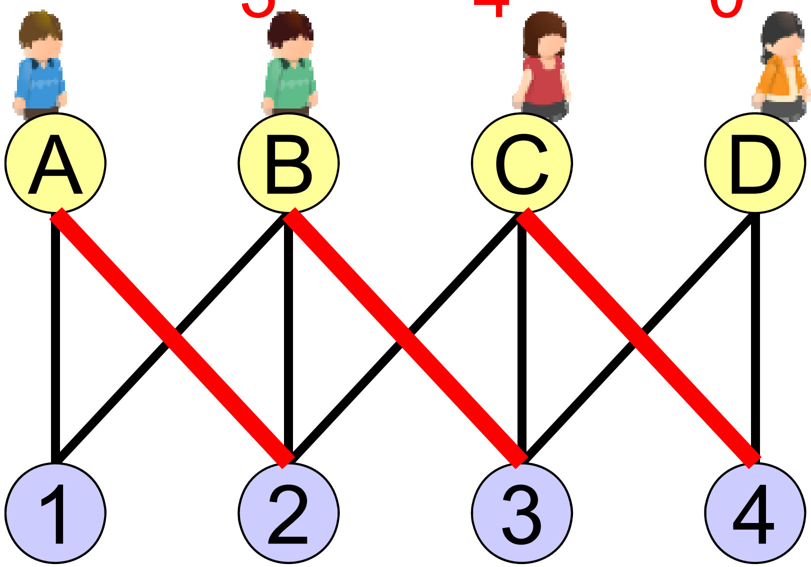
最も良い財をもらえる

注意: 均衡価格は複数存在することもありうる

均衡価格の例

最大利得

7　3　4　0



価格　0　2　5　5

別の価格　0　3　6　6

均衡価格を
どうやって求めるか？

w(i,j)	A	B	C	D
①	2	2		
②	9	4	6	
③		8	7	5
④			9	5

利得	A	B	C	D
①	2	2		
②	7	2	4	
③		3	2	0
④			4	0

最大重みマッチングの最適性条件

U=希望者全て, V=財全て, E=グラフの枝全て

定理：枝集合M⊆Eは最大重みマッチング

←→次の条件を満たす非負実数 $p(i)\ (i \in U), p(j)\ (j \in V)$ が存在

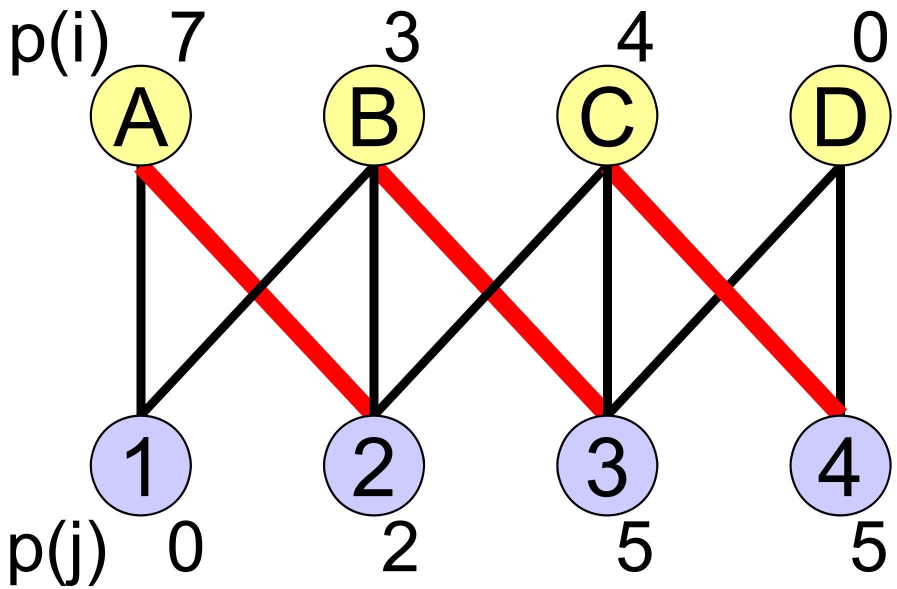
(a) $\forall (i,j) \in E: w(i,j) \le p(i) + p(j)$

(b) $\forall (i,j) \in M: w(i,j) = p(i) + p(j)$

(c) $i \in U$ がマッチングに含まれない⇒ $p(i) = 0$

$j \in V$ がマッチングに含まれない⇒ $p(j) = 0$

最適ポテンシャル

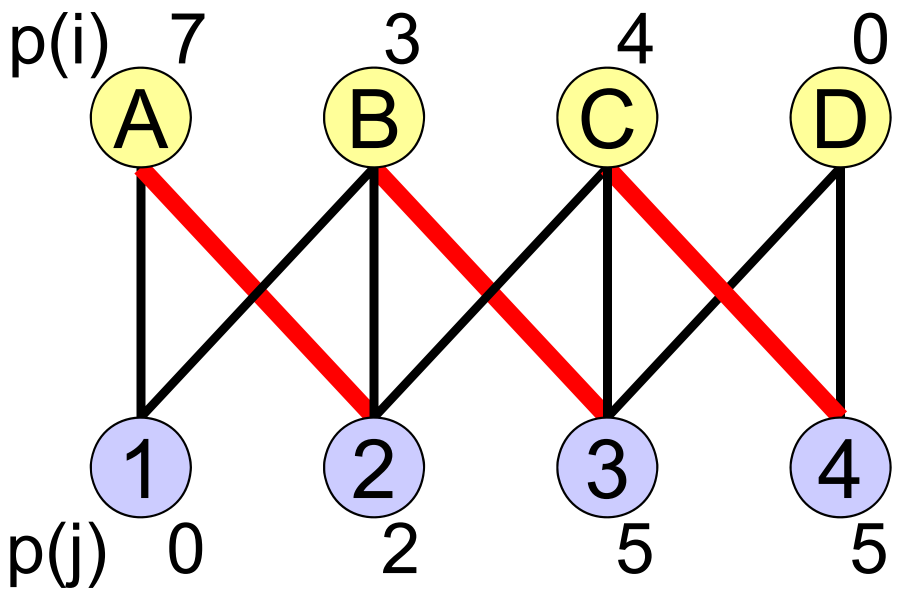


p(j)	w(i,j)	A (p(i)=7)	B (p(i)=3)	C (p(i)=4)	D (p(i)=0)
0	①	2	2		
2	②	9	4	6	
5	③		8	7	5
5	④			9	5

最適性条件の解釈

$p(j)\ (j \in V)$は均衡価格
$p(i)\ (i \in U)$ はその価格の下での最大利得
M は均衡価格に対応するマッチング

定理より
証明可能



利得	A	B	C	D
①	2	2		
②	7	2	4	
③		3	2	0
④			4	0

均衡価格の計算方法と問題点

- 均衡価格は，最適ポテンシャルから容易に得られる
- 最適ポテンシャルは，最大重みマッチングを利用すると効率的に計算可能
- 最大重みマッチング問題は効率的に解くことが出来る

➔ 各参加者の各財への満足度が分かれば，

　　均衡価格は効率的に計算可能

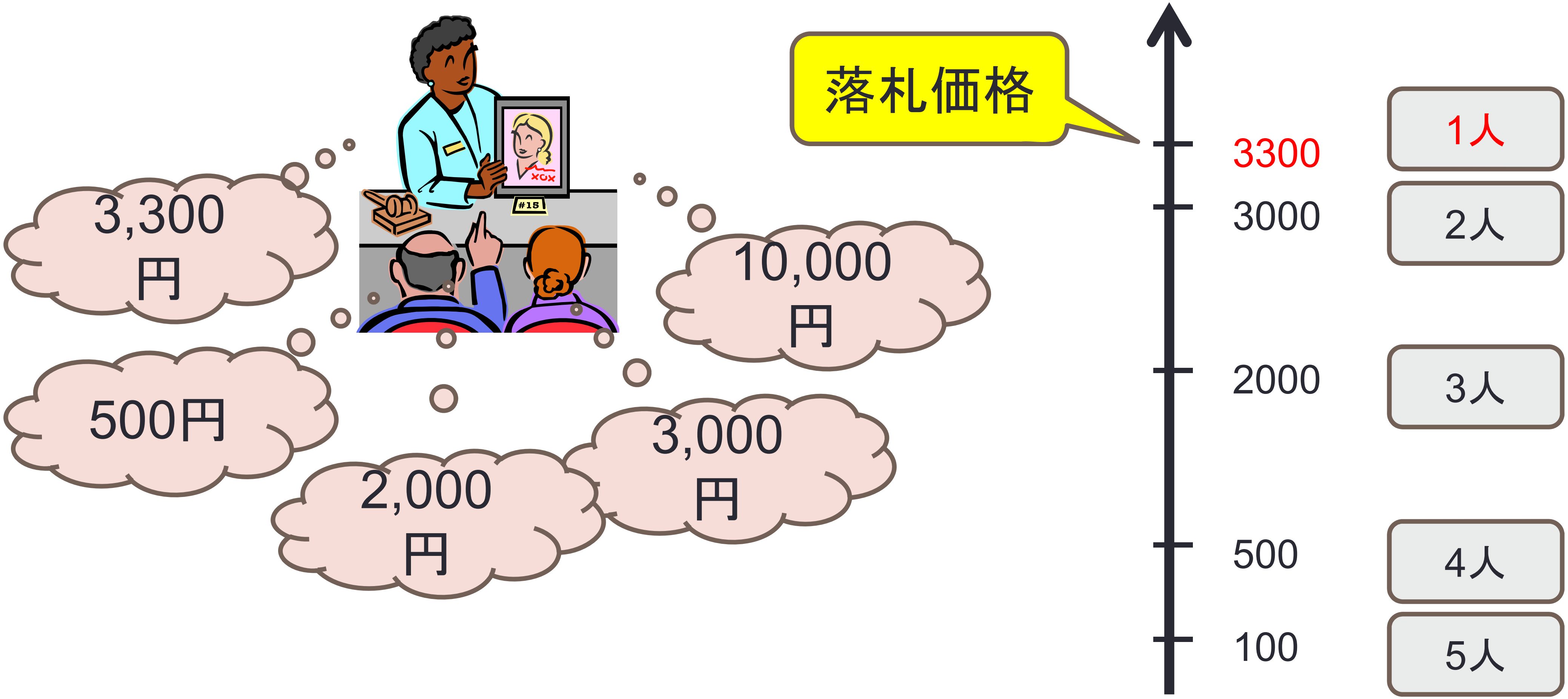
しかし，各参加者は満足度を公開したくない（個人情報だから）

対応策：反復オークション

1つの財の反復オークションの例

- English オークション
  - 価格を徐々に(1単位ずつ)上げる
  - 購入可能なオークション参加者が1人になったら終了

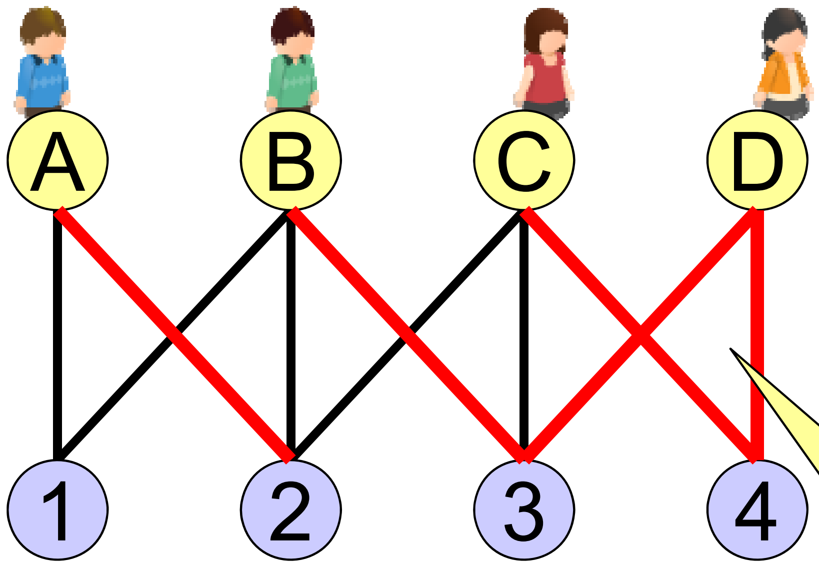
自分の希望価格は公開しない



複数財のEnglish オークション

ステップ0：全ての財の価格＝0 からスタート
ステップ1：現在の価格の下で，各参加者は，
最大利得の財すべてをオークション主催者に教える
ステップ2：主催者は，参加者を最大利得の財に
うまく割り当てできるかどうか，調べる
（うまい割当が存在）➔終了．現在の価格が均衡価格
（うまい割当が存在しない）➔次のステップへ
ステップ3：主催者は，人気が集中している財の中から，
幾つかを「適切に」選択し，それらの価格を1単位増やす．
ステップ1へ戻る．

複数財のEnglish オークション：具体例1



p(j)　0　0　0　0

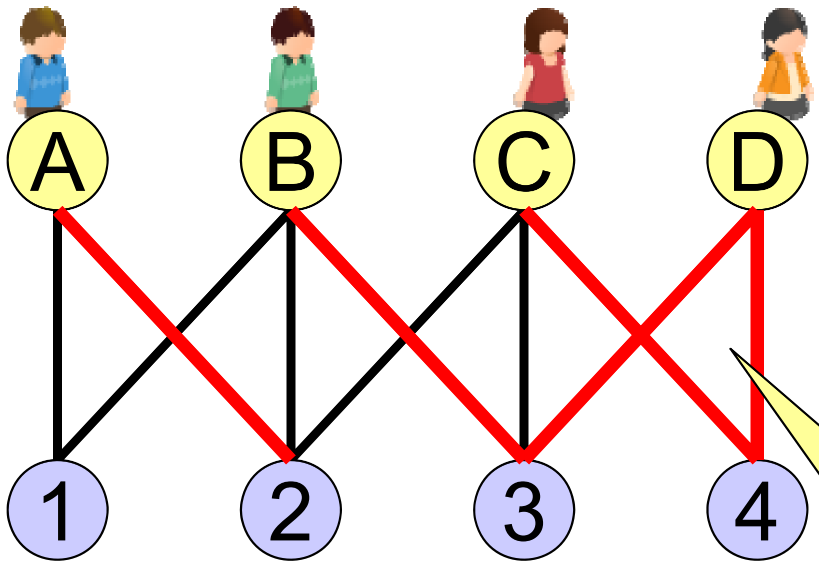
w(i,j)	A	B	C	D
①	2	2		
②	$\boxed{9}$	4	6	
③		$\boxed{8}$	7	$\boxed{5}$
④			$\boxed{9}$	$\boxed{5}$

初期価格
＝0

全員を含む
マッチングは
存在しない
➔希望重複の
③, ④の価格↑

各参加者は
最大利得を
計算

複数財のEnglish オークション：具体例2



p(j)　0　0　1　1

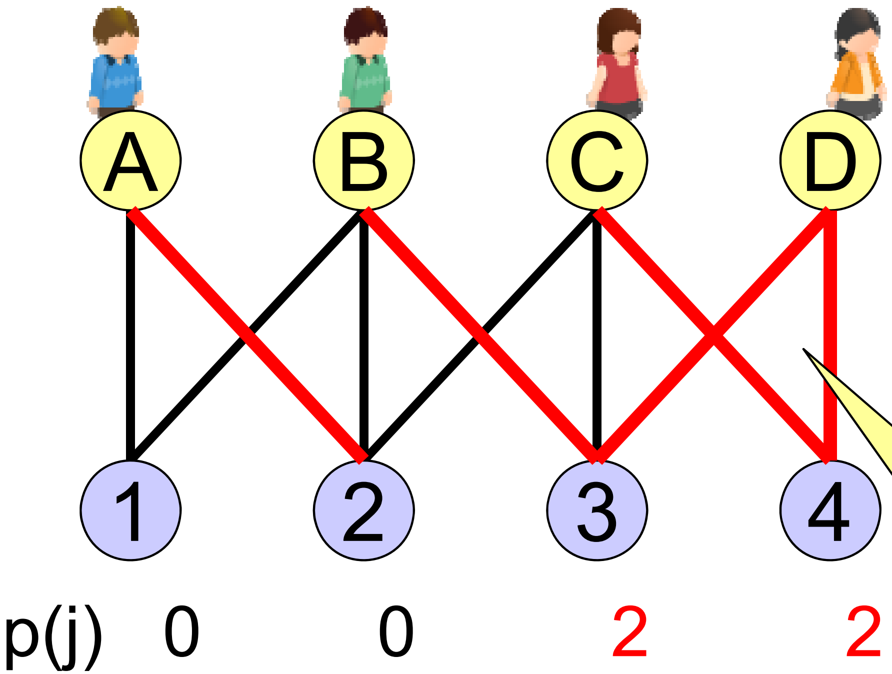
利得	A	B	C	D
①	2	2		
②	9	4	6	
③		7	6	4
④			8	4

価格変更

全員を含むマッチングは存在しない
➔希望重複の③, ④の価格↑

各参加者は最大利得を計算

複数財のEnglish オークション：具体例3



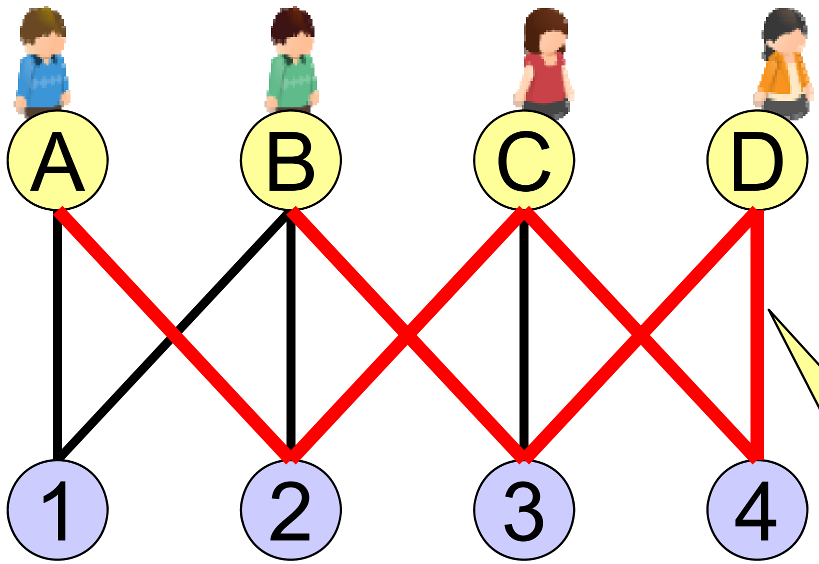
利得	A	B	C	D
①	2	2		
②	9	4	6	
③		6	5	3
④			7	3

価格変更

全員を含む
マッチングは
存在しない
➔希望重複の
③, ④の価格↑

各参加者は
最大利得を
計算

複数財のEnglish オークション：具体例4



p(j)　0　0　3　3

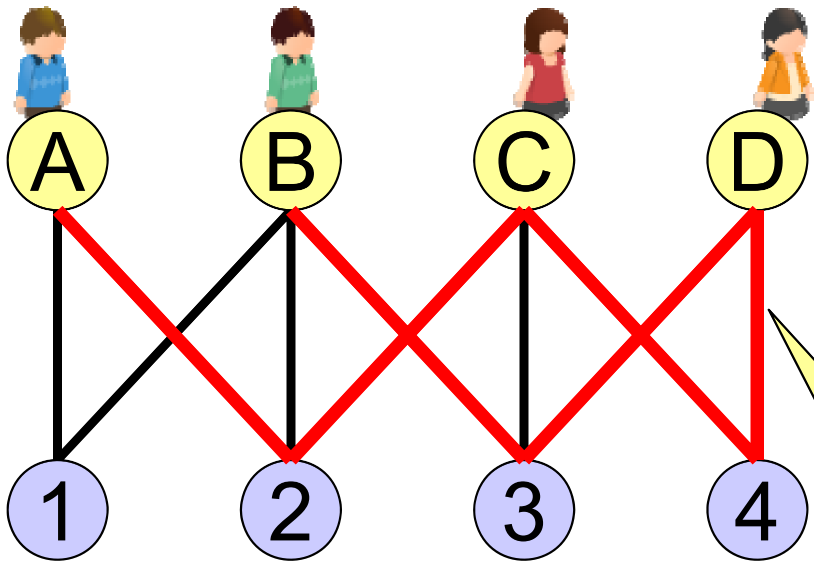
価格変更

利得	A	B	C	D
①	2	2		
②	9	4	6	
③		5	4	2
④			6	2

全員を含むマッチングは存在しない
➔希望重複の②, ③, ④の価格↑

各参加者は最大利得を計算

複数財のEnglish オークション：具体例5



p(j)　0　1　4　4

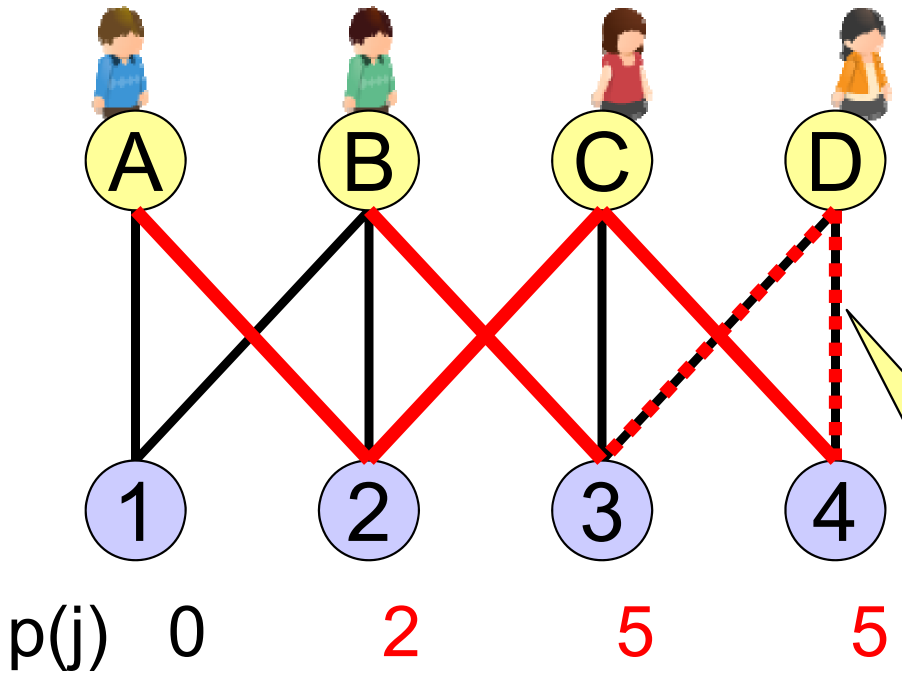
価格変更

利得	A	B	C	D
①	2	2		
②	8	3	5	
③		4	3	1
④			5	1

全員を含むマッチングは存在しない
➔希望重複の②, ③, ④の価格↑

各参加者は最大利得を計算

複数財のEnglish オークション：具体例6



価格変更

利得	A	B	C	D
①	2	2		
②	7	2	4	
③		3	2	0
④			4	0

D以外全員を含むマッチングは存在する
➔終了
現在の価格が均衡価格

各参加者は最大利得を計算
0の場合は特別扱い

複数財のEnglish オークション：注意事項

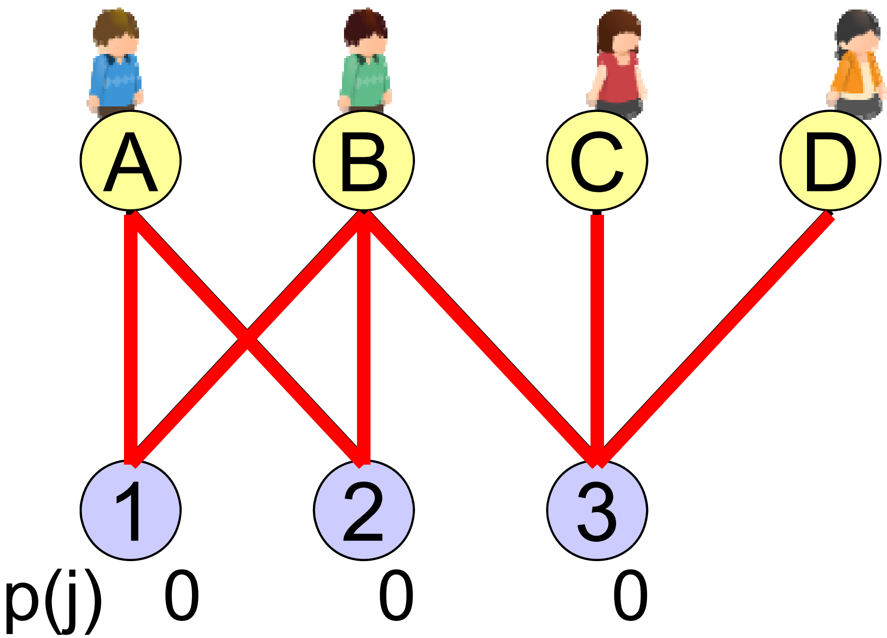
- 各反復において，どの財の価格を増やすか？
- 財を間違って選択

  ➔価格が均衡価格より大きくなってしまう可能性

  （価格を減らすことは許されない）
- ある財に人気が重複するからといって，価格を増やしてよいとは限らない

複数財のEnglish オークション：注意事項

- ある財に人気が重複するからといって，価格を増やしてよいとは限らない



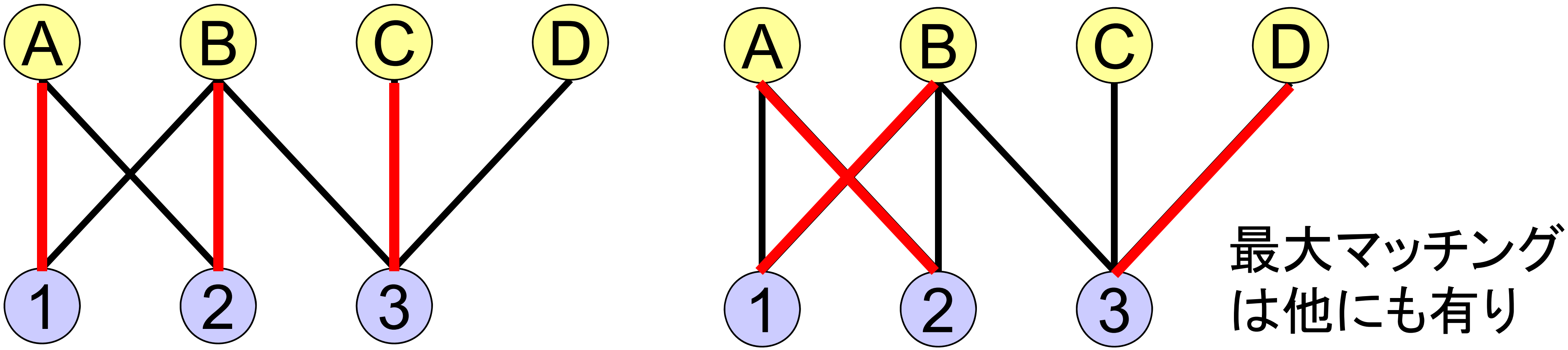
w(i,j)	A	B	C	D
①	1	1		
②	1	1		
③		1	1	1

①，②，③いずれも人気重複
全ての財の価格を増やす？

（極小）均衡価格は(0,0,1)
➔①，②の価格は
増やしたらダメ

複数財のEnglish オークション:注意事項

赤い枝の最大マッチングを全て調べる
➔ ①, ②と③はタイプが違うことがわかる



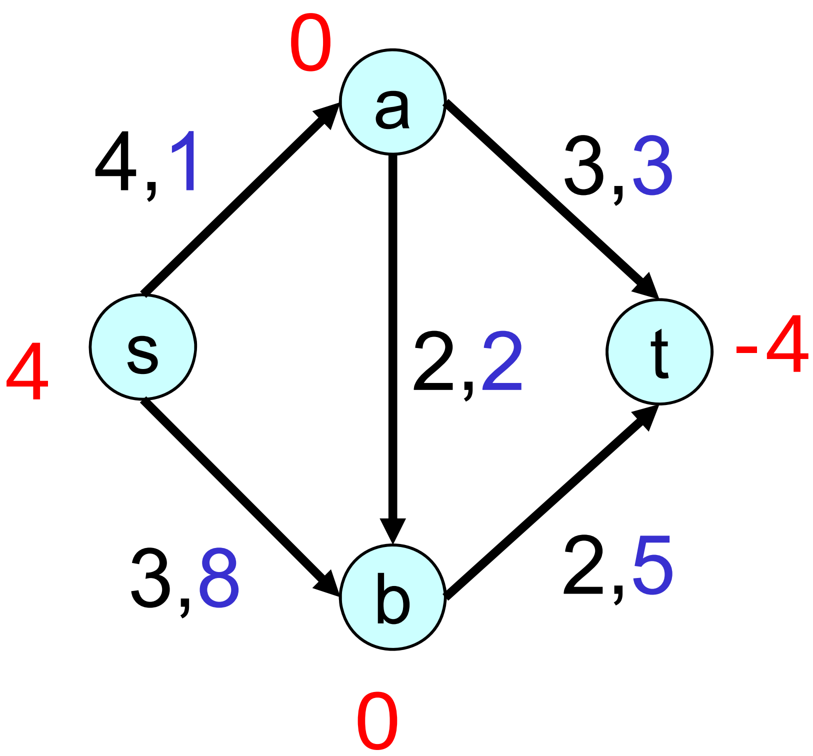
任意の最大マッチングにおいて,
①, ②は常にA,Bと枝で結ばれる 🡐 価格はそのまま
③と枝で結ばれる相手は同じではない(CまたはD) 🡐 価格増加

タイプ分けの方法:最大マッチングを全て調べる必要なし
最大マッチングを1つ使えば可能！(組合せ最適化の既存結果より)

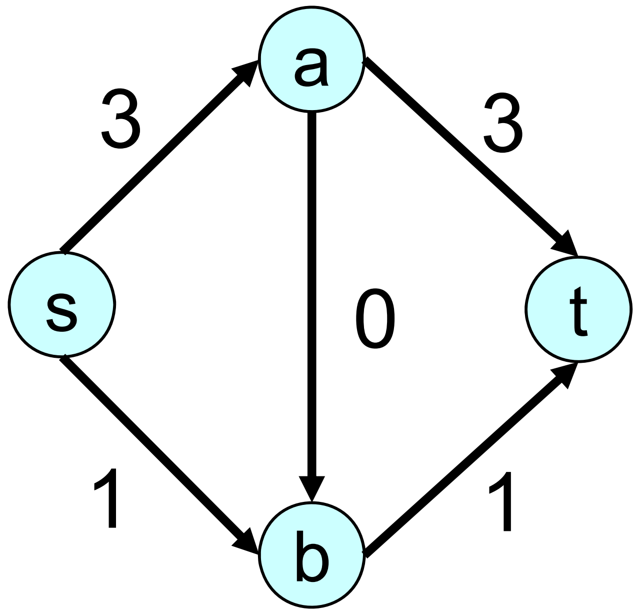
演習問題

問1: 次の最小費用流問題に対して、
(1)定式化せよ
(2)与えられた初期フローに対して負閉路消去アルゴリズムを適用し,
最小費用フローを求めよ(途中の計算過程も省略せず書くこと)

(a)



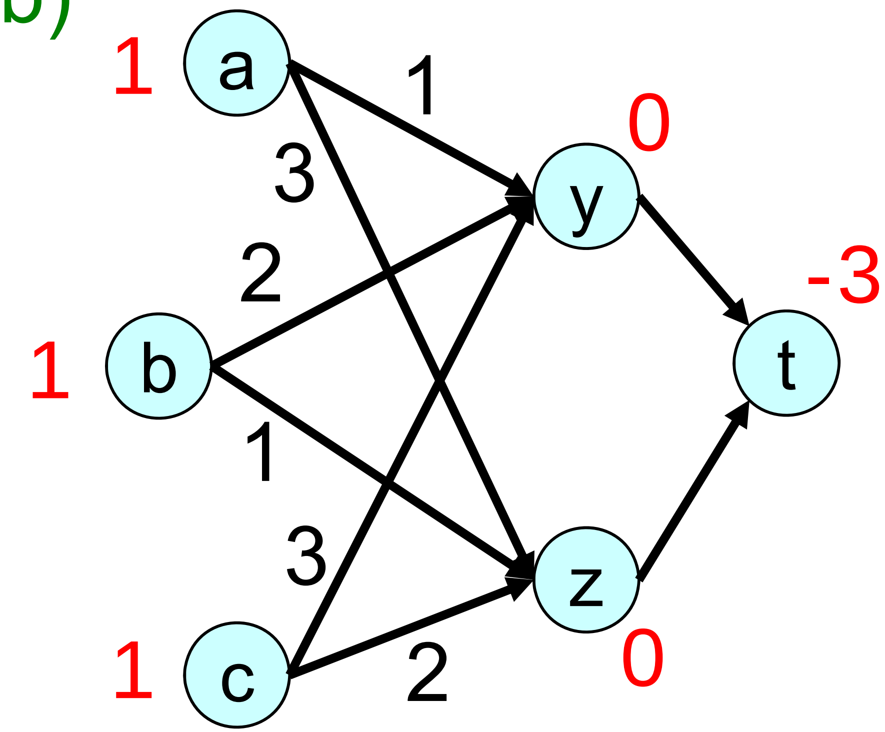
初期フロー



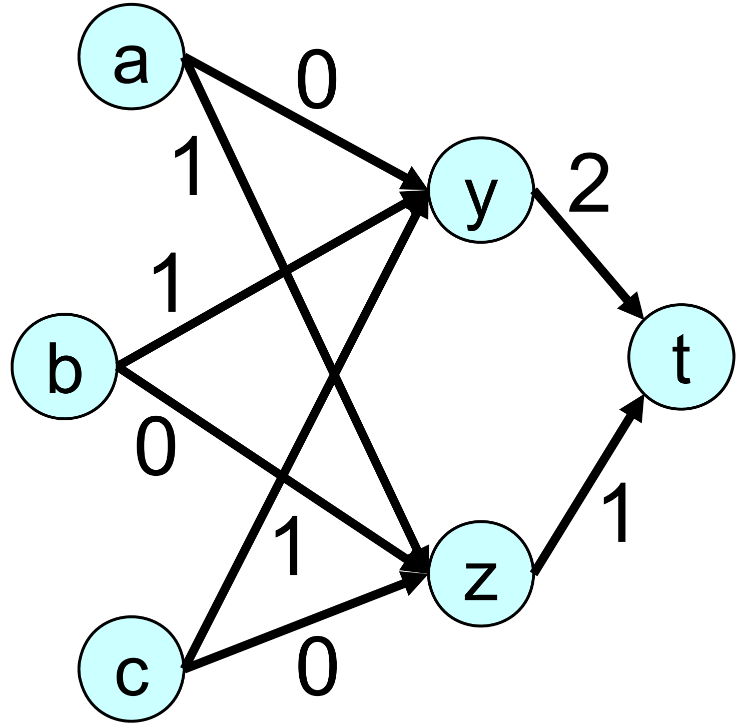
演習問題

問2: 次の最小費用流問題に対して、
(1) 定式化せよ
(2) 与えられた初期フローに対して負閉路消去アルゴリズムを適用し，最小費用フローを求めよ(途中の計算過程も省略せず書くこと)

(b)



初期フロー



枝(y, t), (z, t) の容量は3，それ以外の枝の容量は1
t に入る枝の費用は0，それ以外は各枝の数値を参照